Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1. *(4 puntos)* Sea A un dominio de integridad, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y $Q(A)$ el cuerpo de fracciones de A. Consideremos $A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{b} \in Q(A) \quad | \quad b \notin \mathfrak{p}\}$.
1) Probar que $A_\mathfrak{p}$ es un subanillo de $Q(A)$. Si A es local de ideal maximal $\mathfrak{m}$, describir $A_\mathfrak{m}$.
2) Probar que $\overline{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{b} \in A_\mathfrak{p} \quad | \quad a \in \mathfrak{p}\}$ es el único ideal maximal de $A_\mathfrak{p}$.
Sea M un $A-$módulo. En $M \times (A - \mathfrak{p})$ definimos la siguiente relación:

$$(m, b) \sim (m', b') \Leftrightarrow \exists t \in A - \mathfrak{p} : t(b'm - bm') = 0.$$

3) Probar que es de equivalencia.
Denotemos por $\frac{m}{b}$ la clase de equivalencia de (m, b) y por $M_\mathfrak{p}$ el conjunto de las clases de equivalencia, $M_\mathfrak{p} = \{\frac{m}{b} \quad | \quad m \in M, b \notin \mathfrak{p}\}$. $M_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}-$módulo (y un $A-$módulo) con las operaciones

$$\frac{m}{b} + \frac{m'}{b'} = \frac{b'm + bm'}{bb'}, \quad \frac{a}{c}\frac{m}{b} = \frac{am}{cb} \quad (a\frac{m}{b} = \frac{am}{b})$$

4) Sea $f \in Hom(M, N)$. Se define $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ como $f_\mathfrak{p}(\frac{m}{b}) = \frac{f(m)}{b}$. Probar que $f_\mathfrak{p}$ está bien definido y es un homomorfismo de $A_\mathfrak{p}-$módulos.
5) Probar que los elementos de $A_\mathfrak{p} \otimes_A M$ son de la forma $\frac{1}{b} \otimes m$ con $b \notin \mathfrak{p}$, $m \in M$.
6) Definir una aplicación bilineal de $A_\mathfrak{p} \times M$ en $M_\mathfrak{p}$ y usarla para probar que $A_\mathfrak{p} \otimes_A M \simeq M_\mathfrak{p}$.

Solución.-

1) Para probar que $A_\mathfrak{p}$ es un subanillo de $Q(A)$ tenemos que ver que:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in A_\mathfrak{p} \text{ es } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in A_\mathfrak{p},\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in A_\mathfrak{p}, \text{ y } 1 \in A_\mathfrak{p}.$$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \in A_\mathfrak{p}$, ya que $db \notin \mathfrak{p}$ pues $b, d \notin \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. Por la misma razón, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in A_\mathfrak{p}$. Por último, como $1 \notin \mathfrak{p}$, es $1 = \frac{1}{1} \in A_\mathfrak{p}$.
Siempre se tiene que $A \subset A_\mathfrak{p}$, pues $\forall a \in A$, es $a = \frac{a}{1} \in A_\mathfrak{p}$. Sea A local de ideal maximal $\mathfrak{m}$. Sabemos que los elementos que no estan en $\mathfrak{m}$ son unidades. Por tanto, $\forall \frac{a}{b} \in A_\mathfrak{m}$, $\frac{a}{b} = ab^{-1} \in A$, luego $A = A_\mathfrak{m}$.

2) $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \overline{\mathfrak{p}}$ es $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{db} \in \overline{\mathfrak{p}}$, pues, como $a, c \in \mathfrak{p}$, $b, d \notin \mathfrak{p}$, es $ad - bc \in \mathfrak{p}$ y $bd \notin \mathfrak{p}$. También, $\forall \frac{h}{g} \in A_\mathfrak{p}$ es $\frac{h}{g}\frac{a}{b} = \frac{ha}{gb} \in \overline{\mathfrak{p}}$, pues $ha \in \mathfrak{p}$ y $gb \notin \mathfrak{p}$. Esto prueba que $\overline{\mathfrak{p}}$ es un ideal. Para ver que es el único maximal probaremos que todo elemento que no esté en $\overline{\mathfrak{p}}$ es unidad. En efecto, si $\frac{a}{b} \notin \overline{\mathfrak{p}}$, es $a \notin \mathfrak{p}$, luego $\frac{b}{a} \in A_\mathfrak{p}$, y $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = 1$.

3) Veamos que la relación es transitiva. Supongamos que $(m, b) \sim (m', b')$ y $(m', b') \sim (m'', b'')$. Entonces $\exists t_1, t_2 \in A - \mathfrak{p} : t_1(b'm - bm') = 0, t_2(b''m' - b'm'') = 0$. Multiplicando la primera igualdad por $b''t_2$, la segunda por bt_1 y sumando se tiene que $t_1t_2b'(b''m - bm'') = 0$, con $t_1t_2b' \in A - \mathfrak{p}$, luego $(m, b) \sim (m'', b'')$.

4) Supongamos que $\frac{m}{b} = \frac{m'}{b'}$. Entonces $\exists t \in A - \mathfrak{p} : t(b'm - bm') = 0$. Aplicando f se tiene que $0 = f(t(b'm - bm')) = tf((b'm - bm')) = t(b'f(m) - bf(m'))$, es decir $\frac{f(m)}{b} = \frac{f(m')}{b'}$. Por tanto $f_\mathfrak{p}(\frac{m}{b}) = f_\mathfrak{p}(\frac{m'}{b'})$ y está bien definida. Es fácil probar que es homomorfismo.

5) Sea α un elemento de $A_\mathfrak{p} \otimes_A M$. Sabemos que es de la forma $\sum_{i=1}^n (\frac{a_i}{b_i} \otimes m_i)$. Sea $b = \prod_{i=1}^n b_i \notin \mathfrak{p}$, $c_i = \prod_{j \neq i} b_i$. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^n (\frac{a_i}{b_i} \otimes m_i) = \sum_{i=1}^n (\frac{a_ic_i}{b} \otimes m_i) = \sum_{i=1}^n (\frac{1}{b} \otimes a_ic_im_i) = \frac{1}{b} \otimes \sum_{i=1}^n a_ic_im_i = \frac{1}{b} \otimes m.$$

6) Sea $f : A_\mathfrak{p} \times M \to M_\mathfrak{p}$ dada por

$$f(\frac{a}{b}, m) = \frac{am}{b}.$$

Es fácil ver que esta aplicación es bilineal. Por tanto, por la propiedad universal del producto tensorial, se tiene que existe un homomorfismo $h : A_\mathfrak{p} \otimes M \to M_\mathfrak{p}$ tal que $h(\frac{a}{b} \otimes m) = \frac{am}{b}$. Veamos que h es un isomorfismo.
Sobreyectivo: sea $\frac{m}{b} \in M_\mathfrak{p}$, entonces $\frac{m}{b} = h(\frac{1}{b} \otimes m)$.
Inyectivo: Supongamos que $h(\frac{1}{b} \otimes m) = 0$. Entonces $\frac{m}{b} = 0$, por tanto, $\exists t \in A - \mathfrak{p}$ tal que $tm = 0$. Se tiene que

$$\frac{1}{b} \otimes m = \frac{t}{tb} \otimes m = \frac{1}{tb} \otimes tm = \frac{1}{tb} \otimes 0 = 0.$$

Ejercicio 2.- (*2 puntos*) En $\mathbf{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = (x^2y + z, xz + y)$. Se pide:

1. Hallar una base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico con $x < y < z$.

2. ¿Es $G = \{x^2y+z, xz+y, yz-y\}$ una base de Gröbner de I para el orden lexicográfico graduado con $x > y > z$?

Solución.-
1) En este ejercicio hay que prestar atención al hecho de que el orden monomial (lexicográfico graduado) se define a partir de $z > y > x$. Pongamos $exp(x^c y^b z^a) = (a, b, c)$, así el orden es el equivalente al graduado en $\mathbf{Z}^3$.

Sean $f_1 = z + x^2y$, $f_2 = xz + y$ y $G = \{f_1, f_2\}$. Los exponentes de f_1 y f_2 son, respectivamente, $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 1)$. Consideremos la sicigia

$$f_3' = S(f_1, f_2) = x^3y - y.$$

Como $exp(f_3') = (0, 1, 3)$ es menor que $exp(f_1)$ y $exp(f_2)$, es evidente que $f_3' = f_3' R f_1 f_2$. Luego ponemos

$$f_3 = x^3y - y$$

y lo incluimos en el conjunto $G = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Todas las demás sicigias que obtenemos tienen resto cero:

$$S(f_1, f_3) = yz + x^5y^2 = yf_1 + x^2yf_3,$$
$$S(f_2, f_3) = yz + x^2y^2 = yf_1.$$

Luego una base de Gröbner de I es

$$G = \{f_1, f_2, f_3\}.$$

2) Ahora el orden monomial es tal que $x > y > z$. Sean $f_1 = x^2y + z$, $f_2 = xz + y$ y $f_3 = yz - y$. G es una base de Gröbner si el resto de dividir cualquier sicigia $S(f_i, f_j)$ entre f_1, f_2 y f_3 es cero.

Sea $f_4' = S(f_1, f_2) = -xy^2 + z^2$. Es evidente que

$$f_4' R f_1 f_2 f_3 = f_4' \neq 0,$$

luego G no es una base de Gröbner.

Ejercicio 3.-(*2 puntos*) Sea k un cuerpo **no** algebraicamente cerrado.

a) Probar que si $\mathfrak{m}$ es un ideal **maximal** de $k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces el conjunto algebraico $\mathcal{V}(\mathfrak{m})$ es vacío o un punto.

b) Dar explícitamente un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ que **no** sea de la forma

$$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n), \quad a_i \in k.$$

Solución.-

a) Si $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$, existe $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(\mathfrak{m})$. Se tiene entonces:

$$\mathfrak{m} \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{m})) \subset \mathcal{I}(P) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

Al ser $\mathfrak{m}$ maximal se da la igualdad, es decir,

$$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

Por tanto, $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) = \{P\}$.

b) Por no ser k algebraicamente cerrado, existe $f(x_1) \in k[x_1]$ verificando que $f(a) \neq 0$, para todo $a \in k$. Podemos suponer que f es irreducible, pues si no lo fuese, bastaría tomar un factor irreducible de f. Se tiene entonces que $(f(x_1))$ es un ideal maximal de $k[x_1]$.

Sea $\mathfrak{m} = (f(x_1), x_2, \ldots, x_n) \subset k[\mathbf{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$. El ideal $\mathfrak{m}$ es maximal porque

$$k[\mathbf{x}]/\mathfrak{m} \simeq k[x_1]/(f(x_1))$$

es un cuerpo.

El isomorfismo anterior puede probarse viendo que $\mathfrak{m}$ es el núcleo del homomorfismo de anillos sobreyectivo

$$\varphi : k[\mathbf{x}] \longrightarrow k[x_1]/(f(x_1)),$$

definido por

$$\varphi(g(x_1, \ldots, x_n)) = g(\overline{x_1}, 0, \ldots, 0),$$

donde $\overline{x_1} = x_1 + (f(x_1))$. Si $g \in k[\mathbf{x}]$, por división euclídea podemos escribir

$$g = x_2q_2 + \cdots + x_nq_n + r(x_1),$$

con $q_i \in k[\mathbf{x}]$, $2 \leq i \leq n$, $r(x_1) \in k[x_1]$. Por tanto, $\ker\varphi = \mathfrak{m}$.

Ejercicio 4. *(2 puntos)*

1. Sea λ un número complejo. Sea $f : \mathbf{C}^6 \to \mathbf{C}^6$ el endomorfismo $\mathbf{C}$-lineal de matriz (respecto de la base canónica)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Consideremos a $\mathbf{C}^6$ como $\mathbf{C}[X]$-módulo a través de la acción de f de la manera habitual. Calcule sus factores invariantes y aplíquele el teorema de estructura de los módulos f.g. sobre un D.I.P.. ¿Cuál es el anulador de $\mathbf{C}^6$ como $\mathbf{C}[X]$-módulo? ¿y como $\mathbf{C}$-módulo?

2. Sea $G = \mathbf{Z}/\mathbf{Z}3$, grupo cíclico de orden 3. Probar que toda representación irreducible de G en un espacio vectorial complejo de dimensión finita es de dimensión 1.

   Sea $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, que verifica $B^3 = I$. Consideremos la representación $\rho : G \to GL(2, \mathbf{R})$ dada por $\rho(\overline{n}) = B^n$. ¿Es ρ una representación irreducible?

Solución.-

1) Mediante transformaciones elementales de filas y columnas en la matriz $XI - A$ llegamos a la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (X-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (X-\lambda)^3 \end{pmatrix},$$

con lo que los factores invariantes son:

$$X - \lambda, (X-\lambda)^2, (X-\lambda)^3$$

y

$$\mathbf{C}^6 \simeq \mathbf{C}[X]/(X-\lambda) \oplus \mathbf{C}[X]/(X-\lambda)^2 \oplus \mathbf{C}[X]/(X-\lambda)^3.$$

El anulador de $\mathbf{C}^6$ como $\mathbf{C}[X]$-módulo es pues $(X-\lambda) \cap (X-\lambda)^2 \cap (X-\lambda)^3 = (X-\lambda)^3$.
Sin embargo, como $\mathbf{C}$ es cuerpo, el anulador de $\mathbf{C}^6$ como $\mathbf{C}$-módulo, o lo que es lo mismo, como $\mathbf{C}$-espacio vectorial, es 0.

2) Sea $\mu : \mathbf{Z}/\mathbf{Z}3 \to GL(V)$ una representación irreducible en un espacio vectorial complejo V de dimensión finita. Notemos $f = \mu(\overline{1})$, que es un automorfismo de V. Como $\mathbf{C}$ es algebraicamente cerrado f ha de tener todos sus autovalores en $\mathbf{C}$ y por tanto f tendrá autovectores no nulos. Sea $\lambda \in \mathbf{C}$ un autovalor de f y $v \in V$, $v \neq 0$ un autovector asociado: $f(v) = \lambda v$. Consideremos el subespacio vectorial unidimensional $W = \langle v \rangle \subset V$. Obviamente W es invariante por $f = \mu(\overline{1})$, y por tanto por $f^n = \mu(\overline{(n)})$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, es decir, W es invariante por $\mu(\sigma)$ para todo $\sigma \in G$, o lo que es lo mismo, W es una subrepresentación unidimensional de V. Como V es irreducible se ha de tener $V = W$ y por tanto V es de dimensión 1.

Si ρ fuera reducible debería existir una subrepresentación $W \subset \mathbf{R}^2$ no trivial, que en este caso sería necesariamente de dimensión 1. Un generador de W sería pues un autovector (no nulo) de $\rho(\overline{1})$, lo que implicaría que $\rho(\overline{1}) = B$ posee algún autovalor real, lo cual no es cierto. Por tanto ρ es irreducible.