Geometría Afín y Proyectiva **8 de junio de 1999** **Tipo A**

Ejercicio 1.-

1. Dadas una homotecia h y una traslación t, calcular el centro de $h \circ t$.

   Solución.-Supongamos que $O = (0,0)$ y λ son el centro y la razon de h, respectivamente, y que $\mathbf{u} = (a,b)$ es el vector de t. Entonces:

$$M(h \circ t) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a\lambda & b\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   de donde resulta que el centro de $h \circ t$ es: $(\frac{a\lambda}{1-\lambda}, \frac{b\lambda}{1-\lambda})$, esto es, $O' = O + \frac{\lambda}{1-\lambda}\mathbf{u}$.

2. Dado el sistema de referencia afin $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$, calcular las ecuaciones de la afinidad que transforma O en A, A en B y B en O. Probar que el baricentro de OAB es el único punto doble de la afinidad.

   Solución.-La matriz de la afinidad es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y el único punto doble es $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

3. Demostrar que si dos movimientos del plano coinciden sobre tres puntos no alineados entonces son iguales.

   Solución.-Basta observar que el movimiento $f^{-1}g$ tiene tres puntos dobles no alineados y, por lo tanto, es la identidad.

4. Demostrar que la recta determinada por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al otro lado.

   Solución.-Aplicar el teorema de Thales (recíproco).

5. Demostrar que todo triángulo ABC tiene el mismo baricentro que el triángulo determinado por los puntos medios de cada lado.

   Solución.-Basta observar que las medianas coinciden (ver recta de Euler).

6. Dar razonadamente la lista de los movimientos del plano que son involutivos, es decir, aquéllos cuyo cuadrado es la identidad.

   Solución.-La identidad, simetría central y simetrías axiales son claramente involutivas. Una traslación no puede ser involutiva porque el doble de un vector no nulo no puede ser nulo. En el caso de un giro, si el doble del ángulo es 2π, el giro es una simetría central. Por último, si una simetría con deslizamiento fuese involutiva, como su cuadrado puede reducirse al cuadrado de la traslación, estamos en el primer caso.

Ejercicio 2.- Sea X el plano ordinario, en el que se considera fijado un sistema de referencia métrico.

1. Hallar la matriz general de todas las aplicaciones afines que dejan invariante el punto $A = (0,1)$ y transforman el punto $P = (-1,0)$ en el punto $Q = (1,0)$. ¿Cuáles de ellas son afinidades? ¿Puede haber homotecias?

   Solución.-Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AQ}$, se tiene: $\overrightarrow{f}(\mathbf{u_1}) + \overrightarrow{f}(\mathbf{u_2}) = (-1,1)$. Si ponemos $\overrightarrow{f}(\mathbf{u_1}) = (a,b)$, será $\overrightarrow{f}(\mathbf{u_2}) = (-1-a, 1-b)$. Así, la matriz general sería: $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & a & b \\ 0 & -1-a & 1-b \end{pmatrix}$, y como A es doble, podemos calcular α y β, resultando: $\begin{pmatrix} 1 & 1+a & b \\ 0 & a & b \\ 0 & -1-a & 1-b \end{pmatrix}$. (Pueden obtenerse otras expresiones equivalentes a ésta).

   El determinante de esta matriz es $a+b$, por lo que serán afinidades aquéllas que verifiquen $a+b \neq 0$. No puede haber homotecias porque A sería el centro y tendría que estar alineado con P y con Q.

2. Determinar todos los movimientos, f, del plano, tales que $f(A) = A$ y $f(P) = Q$. Calcular, en cada caso, sus elementos geométricos.

   Solución.-Este apartado se puede hacer directamente teniendo en cuenta que un movimiento del plano con un punto doble sólo puede ser un giro o una simetría. Si utilizamos el apartado anterior, al imponer la ortogonalidad de $\overrightarrow{f}$ resultan las siguientes posibilidades:

$a = -1$	$b = 0$	simetría axial de eje OY
$a = 0$	$b = 1$	giro de centro A y ángulo $\pi/2$

Ejercicio 3.- En el espacio afín euclídeo $X = \mathbb{R}^4$, se consideran las variedades:

$$L_1 : 5x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 3 = 0;\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 - 1 = 0$$
$$L_2 : (1, 1, 1, 2) + < (1, 2, 3, 4) >$$
$$L_3 : (1, 1, 1, 1) + < (4, 3, 2, 1) >$$

Se pide:

1. Estudiar las posiciones relativas de L_1 y L_2, de L_1 y L_3 y de L_2 y L_3.

   Solución.-Si ponemos $L_2 = (1, 1, 1, 2) + \lambda(1, 2, 3, 4)$ y sustituimos en L_1 resulta $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$. Esto significa que L_1 y L_2 se cortan en el punto $(1, 1, 1, 2)$. (Obsérvese que L_2 está contenida en el hiperplano $2x_1 - 3x_2 + x_4 - 1 = 0$).

   Análogamente se obtiene que $L_1 \cap L_3 = \emptyset$, y como $D(L_3) =< (4, 3, 2, 1) >$ no está contenida en $D(L_1)$, resulta que L_1 y L_3 se cruzan.

   Por último, como el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es 3, L_2 y L_3 se cruzan.

2. Determinar una base de la perpendicular común a L_2 y L_3.

   Solución.-Se trata de calcular una base de la variedad $(D(L_2) + D(L_3))^{\perp} = \langle (1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1) \rangle^{\perp}$ Para ello se resuelve el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 4t & = & 0 \\ 4x + 3y + 2z + t & = & 0 \end{array} \right.$ y resulta $\langle (1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1) \rangle$

3. ¿Existen hiperplanos que contengan a L_1 y L_2. ¿Cuántos?. Hallar sus ecuaciones.

   Solución.-Como L_1 y L_2 se cortan en un punto, la fórmula de la dimensión nos dice que: $dim(L_1 + L_2) = 2 + 1 - 0 = 3$, por lo que $L_1 + L_2$ es un hiperplano y, según el primer apartado, este hiperplano es: $2x_1 - 3x_2 + x_4 - 1 = 0$

4. ¿Existen hiperplanos que contengan a L_1 y L_3. ¿Cuántos?. Hallar sus ecuaciones.

   Solución.-Como L_1 y L_3 se cruzan, la fórmula de la dimensión nos dice que: $dim(L_1 + L_2) = 2 + 1 + 1 - 0 = 4$, por lo que no existe ningún hiperplano que contenga a L_1 y L_3.

5. ¿Es posible trazar desde el origen una recta que corte a L_2 y L_3?. Determinarla, en su caso.

   Solución.-Calculamos los planos

$$\begin{array}{ll} O + L_2 = (0, 0, 0, 0) + \langle (1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 2) \rangle & : \{x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, 2x_2 - x_4 = 0\} \\ O + L_3 = (0, 0, 0, 0) + \langle (4, 3, 2, 1), (1, 1, 1, 1) \rangle & : \{x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0\} \end{array}$$

   cuya intersección es la recta $r = (0, 0, 0, 0) + \langle (1, 2, 3, 4) \rangle$, que corta a L_3 en el punto $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, pero es paralela a L_2, por lo que, en este caso, la respuesta a la pregunta es NO.

Ejercicio 4.- Sea $\mathbf{P}$ el plano proyectivo, y $\mathbf{R}$ el conjunto de las rectas proyectivas de $\mathbf{P}$. Consideremos las aplicaciones

$d_1 : \mathbf{P} \to \mathbf{R} \quad d_1(a_0 : a_1 : a_2) = \{a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$ y $d_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{P} \quad d_2(\{b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\}) = (b_0 : b_1 : b_2)$.

1. Demostrar que d_1 está bien definida y es biyectiva.

   Solución.-Si $P = (a_0 : a_1 : a_2) = (b_0 : b_1 : b_2)$ será $a_i = \lambda b_i$ con $\lambda \neq 0$. Entonces la recta $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ coincide con la recta $b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$, por lo que d_1 está bien definida.

   Por otra parte, es evidente que d_1 es sobreyectiva y si

$$d_1(a_0 : a_1 : a_2) = d_1(b_0 : b_1 : b_2) \Rightarrow \{a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} = \{b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\}$$

   y entonces se tiene $a_i = \lambda b_i$ con $\lambda \neq 0$, por lo que ambos puntos son el mismo y d_1 es inyectiva.

2. Sea P un punto y r una recta. Demostrar que $P \in r$ si, y sólo si, $d_2(r) \in d_1(P)$.

   Solución.-Sean:

$$P = (a_0, a_1, a_2); d_1(P) = \{a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}; r = \{b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\}, d_2(r) = (b_0 : b_1 : b_2)$$

   Se tiene: $P \in r \Leftrightarrow b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \Leftrightarrow d_2(r) \in d_1(P)$

3. Sean P un punto y r y s dos rectas. Demostrar que si $r \cap s = \{P\}$ entonces $d_1(P) = d_2(r) + d_2(s)$.

   Solución.-Sean $P = (p_0 : p_1 : p_2); r = \{a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}; s = \{b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\}$, con $r \cap s = \{P\}$.

   Como $P \in r$ y $P \in s$, por el apartado anterior, se tiene que: $d_2(r) \in d_1(P)$ y $d_2(s) \in d_1(P)$. Como r y s se cortan en un punto, no son coincidentes y, por tanto, $d_2(r)$ y $d_2(s)$ son puntos linealmente independientes y de aquí el resultado.