ALGEBRA III. Examen de diciembre 4-12-00

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1:(*5 puntos*) Demostrar las siguientes afirmaciones. Si coinciden con proposiciones demostradas en teoría o son equivalentes a algunas de éstas, habrá de repetirse la demostración dada en clase o sustituirse por otra similar que se base en los mismos preliminares. Los resultados que se usen en las demostraciones no habrá que demostrarlos, pero sí dejar sus enunciados bien claros.

1. Sea A un anillo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado y M un A-módulo. Existe un isomorfismo de A-módulos
$$S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M.$$
2. Si A es un anillo noetheriano, entonces $A[X]$ es noetheriano.
3. Sea k un cuerpo infinito y $H \subset k^n$ una hipersuperficie, es decir $H = \mathcal{V}(f)$ con $f \in k[X_1, \ldots, X_n] - \{0\}$. Si k es algebraicamente cerrado entonces $\dim(H) = n-1$, pero si k no es algebraicamente cerrado sólo podemos asegurar $\dim(H) \leq n-1$.
4. Si V es una variedad afín monomial y $V = \bigcup_{j=1}^{r} V_j$ es su descomposición en componentes irreducibles, entonces las variedades V_j son subespacios de coordenadas.
5. Si A es un anillo noetheriano y M es un A-módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{Ass}(M)$ es un conjunto finito.

Ejercicio 2: (*2'5 puntos*)

1. Sea $k \subset K$ una extensión de cuerpos. Supongamos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ son algebraicos sobre k. Probar que $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ es un cuerpo.
2. Sea $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal, $I \neq (1)$. Sea $\overline{k}$ el cierre algebraico de la extensión y $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{V}_{\overline{k}}(I)$, es decir $(c_1, \ldots, c_n) \in \overline{k}^n$ y $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$ para todo $f \in I$.

   Consideramos los siguientes polinomios:
   $f_1(X_1) \subset k[X_1]$ el polinomio mínimo de c_1 sobre k,
   $f_i(X_1, \ldots, X_i) \in k[X_1, \ldots, X_i]$ tal que $f_i(c_1, \ldots, c_{i-1}, X_i)$ es el polinomio mínimo de c_i sobre $k[c_1, \ldots, c_{i-1}]$, $2 \leq i \leq n$.

   Probar que el ideal $J = (f_1, \ldots, f_n) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ es un ideal maximal y que $I \subset J$.

Ejercicio 3: (*2'5 puntos*) La imagen de la aplicación que definimos a continuación recibe el nombre de *inmersión d-upla*. Supondremos que k es un cuerpo **infinito**.

Sean $n, d > 0$ dos enteros positivos, y sean $M_0, \ldots, M_N$ todos los monomios de grado d en las $n+1$ variables $X_0, \ldots, X_n$, donde $N = \binom{n+d}{n} - 1$. Definimos la aplicación $\psi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$, por $\psi((a_0 : \cdots : a_n)) = (M_0(\mathbf{a}) : \cdots : M_N(\mathbf{a}))$.

1. Probar que ψ está bien definida y es inyectiva.
2. Probar que la imagen de ψ es una variedad irreducible en $\mathbb{P}^N$ [Ayuda: Sea $\phi : k[Y_0, \ldots, Y_N] \longrightarrow k[X_0, \ldots, X_n]$ el homomorfismo de k-álgebras definido por $\phi(Y_i) = M_i$. Probar que su núcleo es homogéneo y primo. Concluir que $Im(\psi) = v_p(Ker\phi)$]
3. Describir **razonadamente** un algoritmo cuya entrada sean los enteros n y d, y cuya salida sean unas ecuaciones de $Im(\psi)$.
4. Para $n = 1$ y $d = 3$, comprobar que $Im(\psi)$ es una curva monomial proyectiva, es decir, la clausura proyectiva de una curva monomial afín. Dar las paramétricas de esta última.