ALGEBRA. Examen final de junio (Segundo parcial) 30-6-00

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1:(*4'5 puntos*) Demostrar las siguientes afirmaciones. Si coinciden con proposiciones demostradas en teoría o son equivalentes a algunas de éstas, habrá de repetirse la demostración dada en clase o sustituirse por otra similar que se base en los mismos preliminares. Los resultados que se usen en las demostraciones no habrá que demostrarlos, pero sí dejar sus enunciados bien claros.

1. Sean $A \subset B$ anillos, $\alpha \in B$. Las siguientes condiciones son equivalentes
   (a) α es entero sobre A.
   (b) Existe un subanillo de B que contiene a A y a α, y que es un A-módulo finitamente generado.
2. Sea k un cuerpo infinito, y X_i indeterminadas, $1 \leq i \leq n$, entonces
$$\dim(k[X_1, \ldots, X_n]) = n.$$
3. Sea A un anillo noetheriano, $I \subset A$ un ideal, $I \neq (1)$. Los primos que aparecen en el conjunto de ideales
$$\{(I : x) \mid x \in A\},$$
son exactamente los primos asociados a I.

Ejercicio 2: (*4 puntos*) La imagen de la aplicación que definimos a continuación recibe el nombre de *inmersión d-upla*. Supondremos que k es un cuerpo **infinito**.

Sean $n, d > 0$ dos enteros positivos, y sean $M_0, \ldots, M_N$ todos los monomios de grado d en las $n+1$ variables $X_0, \ldots, X_n$, donde $N = \begin{pmatrix} n+d \\ n \end{pmatrix} - 1$. Definimos la aplicación $\psi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$, por $\psi((a_0 : \cdots : a_n)) = (M_0(\mathbf{a}) : \cdots : M_N(\mathbf{a}))$.

1. Probar que ψ está bien definida y es inyectiva.
2. Probar que la imagen de ψ es una variedad irreducible en $\mathbb{P}^N$ [Ayuda: Sea $\phi : k[Y_0, \ldots, Y_N] \longrightarrow k[X_0, \ldots, X_n]$ el homomorfismo de k-álgebras definido por $\phi(Y_i) = M_i$. Probar que su núcleo es homogéneo y primo. Concluir que $Im(\psi) = v_p(Ker\phi)$].
3. Describir **razonadamente** un algoritmo cuya entrada sean los enteros n y d, y cuya salida sean unas ecuaciones de $Im(\psi)$.
4. Para $n = 1$ y $d = 3$, comprobar que $Im(\psi)$ es una curva monomial proyectiva, es decir, la clausura proyectiva de una curva monomial afín. Dar las paramétricas de esta última.

Ejercicio 3: (*1'5 puntos*) Calcular el polinomio de Hilbert afín del ideal I de $k[x, y, z]$ engendrado por los polinomios $f_1 = z^2 + x, f_2 = xz^2$.