ÁLGEBRA IV **Examen Parcial de Febrero** **25-2-2000**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1 (3 puntos). Responder a las siguientes cuestiones:

(A) Sea C una curva afín, P un punto de C y $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ el anillo local de C en P. Probar que $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ es isomorfo a k.

(B) Se considera el polinomio

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= Y^4 - (2X^3 + X + 1)Y^2 + X^6 + X^4 + X^3 + X \\ &= (Y^2 - X^3 - 1)(Y^2 - X^3 - X). \end{aligned}$$

Denotaremos por $(\mathcal{O}_{(a,b)}, \mathfrak{m}_{(a,b)})$ el anillo local de la curva $\mathcal{V}(f) \subset \mathbf{A}^2$ en el punto (a,b). Estudiar si son o no de valoración discreta los anillos $\mathcal{O}_{(1,\sqrt{2})}$ y $\mathcal{O}_{(0,0)}$.

(C) Sea $F(X_0, X_1, X_2)$ un polinomio homogéneo irreducible en $k[X_0, X_1, X_2]$ de grado mayor o igual que 2. Notemos V la variedad definida por F en $\mathbf{A}^3$ y notemos C la curva plana definida por F en $\mathbf{P}_2(k)$. Probar que

$$Sing(V) = \left(\bigcup_{P=(\alpha:\beta:\gamma)\in Sing(C)} r_P \right) \cup \{(0,0,0)\},$$

donde r_P es la recta de $\mathbf{A}^3$ que pasa por $(0,0,0)$ y (α, β, γ).

Ejercicio 2 (3 puntos). Responder a las siguientes cuestiones:

(A) Sea $f : V \subset k^n \longrightarrow W \subset k^m$ un morfismo de variedades afines. Probar que existe $g : k^n \longrightarrow k^m$ morfismo de variedades tal que $g|_V = f$.

(B) Probar que, dada una variedad proyectiva irreducible cualquiera, existe una base de su topología de Zariski formada por abiertos que son variedades afines.

(C) Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación entre variedades y $V = \cup V_i$ un recubrimiento por abiertos de V. Probar que, para comprobar que f es un morfismo, basta comprobar que lo es $f|_{V_i}$ para todo i.

Ejercicio 3 (4 puntos). En el plano proyectivo $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ se considera la curva definida por el polinomio $F(X,Y,Z) = ZY^2 + Y^3 - X^3$. Calcular y clasificar sus puntos singulares (esto es, determinar si son o no múltiples ordinarios). Obtener razonadamente una curva D plana con puntos singulares que sean todos múltiples ordinarios, a partir de la dada. Por último, realizar una explosión en una carta que contenga a un punto singular de la curva D y estudiar las singularidades de la curva transformada estricta.

(**NOTA:** Con vistas a obtener una puntuación óptima se recomienda razonar muy detalladamente todos los pasos del proceso, aún a riesgo de repetir enunciados de las clases teóricas.)

TIEMPO: Cuatro horas.