ALGEBRA IV **Primer Parcial (Álg. Conm. y Geom. Alge.)** **30-01-2002**

Apellidos **Nombre**

Cuestiones.-
a) Sea $f(x,y) \in \mathbf{C}[x,y]$ (no necesariamente irreducible) y notemos C la curva definida por f. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal del anillo local de C en uno de sus puntos P. Probar que si $\mathfrak{m}$ es principal entonces el punto P es no singular y que por P sólo pasa una componente irreducible de C.
b) Sea $f(x,y) = y^3 - y^4 - x^4$ y sea C la curva plana compleja definida por f. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de C en el punto $(0,0)$. Hallar las dimensiones de los espacios vectoriales complejos $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ y $\mathfrak{m}^3/\mathfrak{m}^4$.
c) Se considera en $\mathbf{C}^3$ la variedad afín Z definida por los polinomios $x^2-y^2, x^2+y^2-2z^2$. Hallar una familia infinita de puntos P de Z tales que $\mathfrak{m}_P(Z)$ sea principal. ¿Existe algún punto R en Z tal que $\mathfrak{m}_R(Z)$ no sea principal?

Ejercicio 1.- En el plano complejo proyectivo se considera la curva C definida por el polinomio $(X_0 - X_1)^3 X_2 - X_0^4$. Se pide:
a) Hallar los puntos singulares de C y sus multiplicidades. Hallar $g^*(C)$.
b) Previo cambio de coordenadas adecuado, realizar una transformación cuadrática centrada en $P_2 = (0:0:1)$. Sea C' la curva transformada estricta obtenida. Hallar una ecuación de C' y calcular $g^*(C')$. ¿Tiene C' puntos múltiples no ordinarios?

Ejercicio 2.- En $\mathbf{C}^3$ se considera la variedad afín $Z = \mathcal{V}(x^2 - y^3, y^2 - z^3)$. Hallar un morfismo sobreyectivo de $\mathbf{C}$ en Z. ¿Es Z irreducible?

Cuests: a) 1pt; b) 1.5pts; c) 1.5pts. Ej. 1 = 3.5 pts., Ej. 2 = 2.5 pts.