ALGEBRA IV **Examen (Segundo parcial)** **09-06-2000**

Apellidos **Nombre**

Cuestiones.-
a) Sea C una curva plana irreducible de género estrictamente positivo. Probar que existe un divisor canónico efectivo.
b) Sea C una curva plana irreducible de género 2 y sea X su modelo no singular. Probar que para todo P en X se tiene $d(P) = 1$. (*Se sugiere aplicar Riemann-Roch*).
c) Sea C la cúbica de ecuación $X^2Z - Y(Y-2Z)(Y-3Z) = 0$. Notemos x, y las funciones racionales sobre C determinadas por $X/Z, Y/Z$. Sea $\omega = \frac{dy}{x}$. Probar explícitamente que $\mathrm{ord}_P(\omega) = 0$ para todo $P \in C$.

Ejercicio 1.- Sea C una curva plana irreducible y sea X su modelo no singular. Sean W un divisor canónico y $D = \sum_P n_P P$ un divisor tal que $d(D) > 0$, $d(W - D) > 0$. Notemos $D' = \sum_P n'_P P = W - D$. Se pide:
a) Probar que existen D_1 y D'_1 efectivos y linealmente equivalentes con D y D' respectivamente.
b) Supongamos D y D' efectivos. Sea $\xi \in \mathcal{L}(D)$. Probar que la aplicación $\phi : \mathcal{L}(D') \to \mathcal{L}(W)$, definida por $\phi(\eta) = \eta\xi$, para $\eta \in \mathcal{L}(D')$, es una aplicación lineal entre espacios vectoriales.
c) Notemos $\overline{\phi} : \mathcal{L}(D') \to \frac{\mathcal{L}(W)}{\mathcal{L}(D)}$ la aplicación lineal inducida. Supongamos que $\xi \in \mathcal{L}(D)$ verifica además $\xi \notin \mathcal{L}(D - P)$ para los puntos $P \in X$ tales que $n'_P > 0$. Probar que el núcleo de $\overline{\phi}$ es $\mathcal{L}(0)$.

Ejercicio 2.- Sea C la cúbica definida por $y^2z = x^3 + 3xz^2 + 4z^3$. Calcular el grupo de sus puntos de torsión, dando explícitamente sus elementos.

Cuestiones: a) $\equiv$ 1 pt. b) $\equiv$ 1 pt. c) $\equiv$ 1.5 pt.

Ejercicio 1: 3.5 pts.	Ejercicio 2: 3 pts.