ALGEBRA IV **Extra. Diciembre (Álg. Conm. y Geom. Alge.)** **28-11-2002**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- Sea Z un subconjunto algebraico irreducible del espacio afín $\mathbf{C}^n$. Probar que las $\mathbf{C}$-álgebras $\mathcal{O}(Z)$ y $A(Z)$ son isomorfas.

Ejercicio 2.- Se considera la familia de curvas planas, afines, complejas C_{ab} definida por la ecuación $y^2 - x^3 - ax - b = 0$ donde $a, b \in \mathbf{C}$. Se pide:
a) Hallar el conjunto Δ de los pares (a, b) tales que la curva C_{ab} sea singular (i.e. tenga al menos un punto singular).
b) Sea $(a, b) \in \Delta$. Hallar el conjunto de puntos singulares de C_{ab} y las tangentes a C_{ab} en uno de esos puntos.
c) Sea $(a, b) \in \Delta$. Hallar las ecuaciones de la transformada estricta de C_{ab} mediante la explosión de uno de sus puntos singulares.

Ejercicio 3.- Sea $\mathcal{C}$ la curva proyectiva definida por

$$F(X, Y, Z) = (X^2 + Y^2)^2 + 4X^2YZ - Y^3Z.$$

Sea así mismo $f : \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ una resolución de singularidades, $\{Q_1, Q_2, Q_3\} = f^{-1}(0 : 0 : 1)$.

(a) Estudiar los puntos singulares de $\mathcal{C}$, determinando si son o no múltiples ordinarios. Hallar el género de $\mathcal{C}$.

(b) Hallar $\mathrm{div}(L)$ para $L : X = 0$ y $L : Y = 0$.

(c) Estudiar si es posible que una cónica lisa sea adjunta de $\mathcal{C}$.

(d) Probar que, para todo $P \in \mathcal{C}$, $P - Q_1 - Q_2 - Q_3$ es un divisor canónico.

(e) Sean $P_1, ..., P_n \in \tilde{\mathcal{C}}$. Hallar, para cualesquiera $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{N}$, $d\,(\alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n)$.

$\boxed{\text{Ej. } 1 = 2 \text{ pts., Ej. } 2 = 3 \text{ pts., Ej. } 3 = 5 \text{ pts.}}$