ALGEBRA IV **Ejercicios (primer parcial)** **28-01-2000**[1]

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- Sea C la curva afín plana compleja definida por el polinomio $f = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - y^4 + 4y^3 - 2y^2 - 4y$. Notemos (A_P, m_P) el anillo local de la curva en cada uno de sus puntos P.
a) ¿Puede ser generado $m_{(1,1)}$ por un elemento?
b) Hallar un punto P de C (distinto de $(1,1)$) tal que m_P no pueda ser generado por un elemento.
c) Encontrar, si es posible, un generador del ideal $m_{(0,2)}$.

Ejercicio 2.- Sea G un semigrupo (notado aditivamente) conmutativo con elemento neutro. Sea $S = \oplus_g S_g$ un anillo G-graduado y sea J un ideal de S. Probar que son equivalentes:
a) $J = \oplus_g (J \cap S_g)$.
b) J está generado por elementos homogéneos.
c) Para todo $F \in S$, si $F \in J$ entonces cada componente homogénea de F está en J.

Ejercicio 3.-
a) Sea X una variedad e $Y \subset X$ un abierto o un cerrado. Probar que la inclusión de Y en X es un morfismo de variedades.
b) Sea $f : X \to X'$ un morfismo de variedades. Sean $Y \subset X$, $Y' \subset X'$ (abiertos o cerrados, independientemente) tales que $f(Y) \subset Y'$. Probar que $f_{|Y}$ es un morfismo de variedades.
c) Sea $Z = \mathcal{V}_{\mathbf{C}}(xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbf{C}^3$. Probar que existe un morfismo sobreyectivo de $\mathbf{C}$ en Z. Probar que Z es irreducible.

Ejercicio 4.- a) Encontrar una transformación cuadrática F' de la curva definida por $F = x_1^2 x_2^2 - x_0^4 - x_1^4$ de manera que F' sólo tenga puntos múltiples ordinarios.
b) Sea $C = [F]$ una curva cualquiera y sea P un punto liso de C. ¿Cómo se comporta $g*$ cuando realizamos sobre C una transformación cuadrática centrada en P?
c) Sea C una curva irreducible de grado d. Hallar una cota superior para el número de transformaciones cuadráticas necesarias para obtener (a partir de C) una curva con sólo puntos múltiples ordinarios.

[1]Esto no es un examen. Se trata de unos ejercicios relevantes del primer parcial. Su realización es voluntaria y no tendrá ningún valor en la nota final ni del primer parcial ni del examen final.