ALGEBRA IV **Examen Extraordinario** **20-02-2003**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sean α, β números complejos y sea $f(x,y) = \alpha(x+1)+\beta y^3+(x+1)^4 \in \mathbf{C}[x,y]$. Notemos C la curva definida por $f(x,y)=0$. Se pide:
a) Hallar, en función de α, β, los puntos singulares de C.
b) Sea $P \in C$. Hallar en función de α, β la dimensión del $\mathbf{C}$-espacio vectorial $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.
c) En este apartado se considera $\alpha = 0$. Hallar la ecuación de la transformada estricta de C mediante la explosión del punto $(-1,0)$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Se considera la curva plana, compleja, proyectiva, C definida por $F = x_0^7 - x_1^3 x_2^4$. Se pide:
a) Hallar los puntos singulares de C y sus multiplicidades.
b) Previo cambio de coordenadas, si fuese necesario, realizar una transformación cuadrática centrada en $P_2 = (0:0:1)$. Notemos D la transformada estricta obtenida de C. Hallar $g^*(D)$.

Ejercicio 3.- [5 puntos] Sea C una curva proyectiva, definida por un polinomio F, con exactamente dos puntos singulares P y Q ambos múltiples ordinarios y ambos de multiplicidad 3. Sea así mismo $f : X \to C$ una resolución de singularidades,

$$\{Q_1, Q_2, Q_3\} = f^{-1}(Q), \qquad \{P_1, P_2, P_3\} = f^{-1}(P).$$

Se pide:
a) Probar que X no es isomorfa a $\mathbf{P}^1$.
EN LOS APARTADOS QUE SIGUEN SUPONDREMOS $gr(F) = 6$.
b) Sea r la recta que pasa por P y Q. Hallar $div(r)$. (Nota: Estudiar si r puede o no ser tangente a C en alguno de los dos puntos.)
c) Hallar el grado mínimo que debe tener una curva de género 1 para ser adjunta de C.
d) Hallar un divisor canónico. (Idea: Usar el apartado b)).
e) Hallar, para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbf{N}$,

$$d\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i + \sum_{i=1}^{3} \beta_i Q_i\right).$$