ALGEBRA IV **Examen final** **28-06-2000**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- Sea $C = \mathcal{V}(f) \subset \mathbf{C}^2$ la curva afín plana definida por el polinomio $f = (x - y^2)(y^2 + x^3)$. Para cada punto $P \in C$, denotaremos por A_P el anillo local de C en P y por $\mathfrak{m}_P$ su ideal maximal.
a) Sea $P = (0, 0)$. Estudiar si el ideal $\mathfrak{m}_P$ es principal. En el caso afirmativo encontrar un generador.
b) Sea $P = (1, 1)$. Estudiar si el ideal $\mathfrak{m}_P$ es principal. En el caso afirmativo encontrar un generador.

Ejercicio 2.- Sea $X = \mathbf{C}^2$ y $V = \mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
a) Sea $\mathcal{O}_X(V)$ el anillo de las funciones racionales sobre X definidas en todos los puntos de V. Probar que $\mathcal{O}_X(V)$ es isomorfo a $\mathcal{O}(X)$.
b) Probar que V no es una variedad afín.

Ejercicio 3.- Sea C la curva plana proyectiva definida por $F = x_2x_1^2 - x_0^3$. Hallar una curva plana proyectiva D birracionalmente equivalente a C y tal que todos sus puntos singulares sean múltiples ordinarios.

Ejercicio 4.- a) Sea $D = \sum_P n_P P$ un divisor efectivo en una curva proyectiva lisa X. Sea S el soporte de D. Sea $r \in \mathbf{N}$ y $\xi \in \mathcal{L}(rD)$. Probar que ξ está definida en todos los puntos de $X \setminus S$.
b) Sea C la curva plana proyectiva definida por el polinomio $F = x_0^4 + x_2^4 - x_0x_1^2x_2$. Calcular el género de C y un divisor canónico sobre su modelo liso X.

Ejercicio 5.- Sea X una curva proyectiva lisa compleja y D un divisor sobre X. Se considera el conjunto $\Omega(D) = \{\omega \in \Omega(X) \,|\, \mathrm{div}(\omega) - D \succeq 0\} \cup \{0\}$.
a) Probar que $\Omega(D)$ es un $\mathbf{C}$-espacio vectorial.
b) Sea $\omega \in \Omega(X)$ una forma diferencial no nula. Sea $W = \mathrm{div}(\omega)$. Se considera la aplicación

$$\phi : \mathcal{L}(W - D) \to \Omega(D)$$

definida por: $\phi(\xi) = \xi\omega$. Probar que ϕ es un isomorfismo de $\mathbf{C}$-espacios vectoriales.
c) Hallar $\dim_{\mathbf{C}}(\Omega(0))$ en función del género de X.

Ejercicio 6.- a) Sea C la cúbica definida por $y^2z = x^3 - xz^2$. Calcular el grupo de sus puntos de torsión, dando explícitamente sus elementos.
b) Sea C una curva elíptica en forma afín de Weierstrass. Probar que un punto $P \in C$ tiene orden 2 si y sólo si P es de la forma $(\alpha, 0)$.

Primer parcial: ejercicios 1,2,3.
Segundo parcial: ejercicios 4,5,6.
Toda la asignatura: ejercicios 1,3,5,6.
En los tres supuestos todos los ejercicios tienen el mismo valor.