ÁLGEBRA IV **Examen Final de Septiembre** **15-09-2000**

Apellidos **Nombre**

OBSERVACIÓN: Mientras no se especifique lo contrario, k será un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0.

Ejercicio 1 (3 puntos).– Se considera la curva de $\mathbf{A}^2(k)$ definida por la ecuación

$$F(X,Y) = \left(X^2+Y^2\right)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0.$$

Estudiar sus puntos singulares, diciendo si son o no múltiples ordinarios. Explotar el origen (dando explícitamente las ecuaciones en cada carta) y estudiar las singularidades de la curva obtenida.

Ejercicio 2 (3 puntos).– Consideramos la curva elíptica $\mathcal{C}$, dada por su ecuación afín en $\mathbf{A}^2(\mathbf{Q})$:

$$\mathcal{C} : Y^2 + XY + bY = X^3 - bX^2, \text{ con } b \in \mathbf{Q}.$$

Demostrar que $(0,0)$ es un punto de orden 4. Hallar la torsión de $\mathcal{C}$ para $b=-1$.

Cuestiones (4 puntos).– Responder a las siguientes cuestiones:

(A) Sea $C \subset \mathbf{P}^2(k)$ una curva no irrdeducible y $P \in C$ tal que P está en más de una componente irreducible. Demostrar que P es un punto singular.

(B) Estudiar si la aplicación

$$\begin{array}{rcl} S : \mathbf{P}^1(k) & \longrightarrow & \mathbf{P}^2(k) \\ (x_0 : x_1) & \longrightarrow & (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2) \end{array}$$

es o no un morfismo. Demostrar que su imagen es la cónica no singular de $\mathbf{P}^2(k)$.

(C) Sea $C : X_1^2X_2 = X_0^2(X_0+X_2) \subset \mathbf{P}^2(k)$ y sea r una recta pasando por $(0:0:1)$. Estudiar, distinguiendo los casos que sean necesarios, $\operatorname{div}(r)$, dando en cada caso los puntos del soporte y los coeficientes con los que aparecen (aunque obviamente no hay que dar coordenadas, los puntos deben quedar perfecamente determinados en función de los datos).

(D) Sea $C \subset \mathbf{P}^2(k)$ una curva birracionalmente equivalente a una cúbica no singular. Probar que, para todo divisor efectivo D,

$$\mathcal{L}(D) = \text{grado}(D).$$

TIEMPO: Tres horas y media.