ÁLGEBRA IV | **Examen Extraordinario** | **30-NOV-2000**

**Apellidos** **Nombre**

---

**Ejercicio 1 (3 puntos).**
a) Sea $C$ la curva compleja proyectiva definida por la ecuación $X^2Z - Y(Y-Z)(Y+2Z) = 0$. ¿Para qué puntos $P$ de $C$ el anillo local de $C$ en $P$, $\mathcal{O}_P$, es un anillo de valoración discreta?
b) Se consideran las funciones racionales sobre $C$ definidas por $\xi = X/Z, \eta = Y/Z$. Hallar el divisor de la forma diferencial $d\xi/\eta$.

**Cuestión 1 (2 puntos).** Dada la curva afín compleja $C$ definida por $x^7 - y^5 = 0$, hallar la ecuación, en cada carta, de la transformada estricta de $C$ al hacer la explosión del origen en $\mathbf{C}^2$. Hallar los puntos singulares de dicha transformada estricta.

**Cuestión 2 (2 puntos).** Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $X = \mathbf{k}^2 \setminus (0,0)$. Probar que el anillo $\mathcal{O}(X)$ de las funciones regulares en todos los puntos de $X$ es isomorfo al anillo de polinomios $\mathbf{k}[x,y]$. Probar que el abierto $X$ no puede ser isomorfo a ninguna variedad afín (sobre $\mathbf{k}$).

**Ejercicio 2 (3 puntos).** Se considera, en el plano afín $\mathbf{A}^2(\mathbf{Q})$, la curva definida por la ecuación

$$Y^2 = X^3 + X^2 + 4X + 4.$$

(a) Probar que la curva es isomorfa (por cambios de variables lineales) a la curva dada por la ecuación

$$Y^2 = X^3 + (11 \cdot 27)X + (74 \cdot 27).$$

La curva definida por esta ecuación se denotará en lo sucesivo por $\mathcal{C}$.

(b) Demostrar que el punto $(3, 54)$ es de orden 3 en $\mathcal{C}$.

(c) Calcular el grupo de torsión de $\mathcal{C}$, dando explícitamente un conjunto minimal de generadores (esto es, si es cíclico, basta dar un punto de orden maximal; si no lo es, hay que dar dos puntos).

**Nota:** En general es poco práctico abordar el problema a base de cálculo directo. Un breve razonamiento puede facilitar mucho la labor y, de paso, minimizar los riesgos de errores numéricos.