# ALGEBRA IV (1999-00)

F.J. Castro Jiménez J.M. Tornero Sánchez

## Tema 1.- Anillos de valoración discreta

### 1.1.- Anillos de valoración discreta.

Sea $A$ un anillo. Recordemos que un elemento $a$ de $A$ se dice irreducible si en cualquier descomposición $a = a_1a_2$, o bien $a_1$ o bien $a_2$ son unidades.

**Teorema (de caracterización de los anillos de valoración discreta).** Sea $A$ un dominio que no sea un cuerpo. Son equivalentes:

1) $A$ es local, noetheriano y su ideal maximal es principal.

2) Existe un elemento irreducible (no unidad) $t \in A$ tal que, para todo $a \in A$, $a$ no nulo, existe una única unidad $u$ en $A$ y un único entero no negativo $n$ tales que $a = ut^n$.

**Definición.** Un dominio $A$ (que no sea un cuerpo) verificando las condiciones equivalentes del teorema anterior se llama un anillo de valoración discreta. En tal caso, un generador de su ideal maximal se llama un parámetro de uniformización de $A$.

**Proposición.** Un anillo de valoración discreta es un dominio de dimensión 1. Si $t$ es un parámetro de uniformización de $A$, cualquier otro parámetro de uniformización de $A$ es de la forma $ut$ con $u$ una unidad en $A$.

**Ejemplos de anillos de valoración discreta.**

1.- El anillo $\mathbf{k}[x]_{(x)}$ es un anillo de valoración discreta (es local, noetheriano, su ideal maximal está generado por la clase de $x$ en el localizado y no es un cuerpo).

2.- Análogamente con $\mathbf{k}[x]_{(x-a)}$ para cualquier $a$ en $\mathbf{k}$.

3.- El anillo de series formales $\mathbf{k}[[x]]$ es un anillo de valoración discreta.

**Ejercicio.** Se considera el ideal $(p) \subset \mathbf{Z}$, con $p$ primo. Estudiar si $\mathbf{Z}_{(p)}$ es o no un anillo de valoración discreta.

### 1.2.- Puntos simples de curvas planas.

Sea $C = [f]$ una curva (afín, plana). Sea $P = (a, b) \in \mathbf{k}^2$ un punto de $C$ (i.e. $f(a, b) = 0$). Notaremos por $\mathcal{O}_P(f)$ (o por $\mathcal{O}_P(C)$) el anillo local de la curva $C$ en $P$. Se tiene

$$\mathcal{O}_P(f) = \frac{\mathbf{k}[x, y]_{(x-a,y-b)}}{\langle f/1\rangle}.$$

Notemos $\mathfrak{m}_P(C)$ el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_P(C)$.

Sea $C = [f]$ una curva reducida. Supongamos que $f_1, \ldots, f_m$ son las componentes irreducibles de $f$. Si $P$ es un punto de $C$ que pertenece a una sola componente $f_i$, entonces el anillo local de $C$ en $P$ es isomorfo al anillo local de la curva irreducible $f_i$ en $P$. Podemos por tanto suponer que $f$ es irreducible. Sea $C = [f]$ una curva irreducible y sea $P$ un punto de $C$. Notemos $A$ el anillo local de $C$ en $P$ y sea $\mathfrak{m}$ su ideal maximal. Recordemos que la función de Hilbert-Samuel del anillo local $(A, \mathfrak{m})$ es, por definición, la aplicación $FHS_A : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definida por $FHS_A(\nu) = \dim_{\mathbf{k}}(A/\mathfrak{m}^\nu)$. Notemos $PHS_A(T) \in \mathbf{Q}[T]$ el polinomio de Hilbert-Samuel de $A$.

**Teorema (de la función de Hilbert–Samuel del anillo $\mathcal{O}_P(f)$).** Sea $C = [f]$ una curva irreducible y sea $P$ un punto de $C$. Notemos $(A, \mathfrak{m})$ el anillo local de $C$ en $P$ y sea $m$ la multiplicidad de $C$ en $P$. Entonces, para un $\nu$ suficientemente gande, se tiene que

$$dim_{A/\mathfrak{m}} \left( \frac{\mathfrak{m}^\nu}{\mathfrak{m}^{\nu+1}} \right) = m.$$

**Ejercicio.** (Este resultado es parte de la demostración). Sea $(i_0, j_0)$ el exponente, para el orden lexicográfico de la forma inicial de $f$, y sea $\Delta = (i_0, j_0) + \mathbf{N}^2$ el cuadrante que determina en $\mathbf{N}^2$. Sea $\nu \geq m$ y sean $\xi = X/1$ y $\eta = Y/1$ en $k[X,Y]_{(X,Y)}$.

Probar que las clases

$$\left\{ \xi^i \eta^j + \langle f/1 \rangle \mid i + j = \nu,\ (i,j) \notin \Delta \right\}$$

son una base del $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $\mathfrak{m}^\nu / \mathfrak{m}^{\nu+1}$.

**Teorema (de caracterización de puntos simples de curvas planas).** Sea $C$ una curva irreducible. Sea $P$ un punto de $C$. Entonces $P$ es no singular si y sólo si $\mathcal{O}_P(C)$ es un anillo de valoración discreta. En ese caso, toda recta pasando por $P$ y no tangente a $C$ en $P$ define un parámetro de uniformización en $\mathcal{O}_P(C)$.

## 1.3.- Valoraciones discretas.

Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo.

**Definición.** Se llama valoración discreta de $\mathbf{K}$ toda aplicación sobreyectiva $v : \mathbf{K} \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ verificando:

1. $v(ab) = v(a) + v(b)$.
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

**Notación.** Si $v$ es una valoración discreta de $\mathbf{K}$, se escribe $v(0) = +\infty$.

**Ejemplos de valoraciones.**

1.- Sea $p$ un número primo. Todo racional no nulo $a/b$ se puede escribir de forma única $p^r(a'/b')$ con $a'$ y $b'$ primos con $p$, donde $r \in \mathbf{Z}$. Sea $v_p : \mathbf{Q} \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ la aplicación que asocia a cada $a/b$ el entero $r$. Entonces $v_p$ es una valoración discreta de $\mathbf{Q}$.

2.- Sea $a \in \mathbf{k}$. Cada fracción no nula $f/g$ en $\mathbf{k}(x)$ se puede escibir de forma única $(x-a)^r(f'/g')$, con $f'$ y $g'$ primos con $x - a$. Sea $v_a : \mathbf{k}(x) \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ la aplicación que asocia a cada $f/g$ el entero $r$. $v_a$ es una valoración discreta de $\mathbf{k}(x)$.

3.- Sea $\mathbf{k}((X))$, el cuerpo de cocientes del anillo de series formales $\mathbf{k}[[X]]$. Para cada elemento de $\mathbf{k}((X))$, $f/g$ escribimos

$$\frac{f}{g} = \frac{X^\nu f'}{X^\mu g'}, \text{ con } f' \text{ y } g' \text{ unidades en } \mathbf{k}[[X]].$$

Esta escritura es única y permite definir una valoración $v$ en $\mathbf{k}((X))$ en la forma $v(f/g) = \nu - \mu$.

**Proposición.** (Ver ejercicio 3). Sea $v$ una valoración discreta de un cuerpo $\mathbf{K}$. El conjunto $A_v = \{a \in \mathbf{K} \mid v(a) \geq 0\}$ es un anillo de valoración discreta con cuerpo de cocientes $\mathbf{K}$. El ideal maximal de $A_v$ es el conjunto de elementos $a$ tales que $v(a) > 0$.