ALGEBRA IV (2000-01)

Nota.- Las notas de este tema son un resumen de los resultados probados en clase (de teoría o de prácticas). Francisco J. Castro Jiménez, José M. Tornero Sánchez y José M. Ucha Enríquez han participado en la confección de las mismas. Para su realización hemos consultado la bibliografía citada al final del programa de la asignatura. En particular hemos seguido muy de cerca el libro de W. Fulton "Algebraic Curves", Benjamin, 1969.

Tema 1.- Anillo local de una curva en un punto. Anillos de valoración discreta. Puntos lisos de curvas planas

1.0.- Anillo local de una curva en un punto

Sea $C = [f]$ una curva (afín, plana). Sea $P = (a, b) \in \mathbf{k}^2$ un punto de C (i.e. $f(a, b) = 0$). Notaremos por $\mathcal{O}_P(f)$ (o por $\mathcal{O}_P(C)$) el anillo local de la curva C en P. Es decir, $\mathcal{O}_P(f) = \frac{\mathbf{k}[x,y]_{(x-a,y-b)}}{\langle f/1 \rangle}$. Notemos $\mathfrak{m}_P(C)$ el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_P(C)$.

1.1.- Anillos de valoración discreta.

Sea A un anillo. Recordemos que un elemento a de A se dice irreducible si en cualquier descomposición $a = a_1 a_2$, o bien a_1 o bien a_2 es una unidad.

Teorema (de caracterización de los anillos de valoración discreta). Sea A un dominio que no sea un cuerpo. Son equivalentes:

1) A es local, noetheriano y su ideal maximal es principal.
2) Existe un elemento irreducible (no unidad) $t \in A$ tal que, para todo $a \in A$, a no nulo, existe una única unidad u en A y un único entero no negativo n tales que $a = ut^n$.

Definición. Un dominio A (que no sea un cuerpo) verificando las condiciones equivalentes del teorema anterior se llama un anillo de valoración discreta. En tal caso, un generador de su ideal maximal se llama un *parámetro de uniformización* de A.

Ejercicio. Un anillo de valoración discreta es un dominio de dimensión 1. Si t es un parámetro de uniformización de A, cualquier otro parámetro de uniformización de A es de la forma ut con u una unidad en A.

Ejemplos de anillos de valoración discreta.

1.- El anillo $\mathbf{k}[x]_{(x)}$ es un anillo de valoración discreta (es local, noetheriano, su ideal maximal está generado por la clase de x en el localizado y no es un cuerpo).

2.- Análogamente con $\mathbf{k}[x]_{(x-a)}$ para cualquier a en $\mathbf{k}$.

3.- El anillo de series formales $\mathbf{k}[[x]]$ es un anillo de valoración discreta.

Ejercicio. Se considera el ideal $(p) \subset \mathbf{Z}$, con p primo. Estudiar si $\mathbf{Z}_{(p)}$ es o no un anillo de valoración discreta.

1.2.- Puntos lisos de curvas planas.

Sea $C = [f]$ una curva reducida. Supongamos que $f_1, \dots, f_m$ son las componentes irreducibles de f. Si P es un punto de C que pertenece a más de una componente irreducible de C entonces $\mathcal{O}_P(C)$ no es un dominio. Si P pertenece a una sola componente f_i, entonces el anillo local de C en P es isomorfo al anillo local de la curva irreducible f_i en P. Podemos por tanto suponer que f es irreducible. Sea $C = [f]$ una curva irreducible y sea P un punto de C. Notemos A el anillo local de C en P y sea $\mathfrak{m}$ su ideal maximal. Recordemos que la función de Hilbert-Samuel del anillo local $(A, \mathfrak{m})$ es, por definición, la aplicación $FHS_A : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definida por $FHS_A(\nu) = \dim_{\mathbf{k}}(A/\mathfrak{m}^\nu)$. Notemos $PHS_A(T) \in \mathbf{Q}[T]$ el polinomio de Hilbert-Samuel de A.

Teorema (de la función de Hilbert–Samuel del anillo $\mathcal{O}_P(f)$). Sea $C = [f]$ una curva irreducible y sea P un punto de C. Notemos $(A, \mathfrak{m})$ el anillo local de C en P y sea m la multiplicidad de C en P. Entonces, existe $n \in \mathbf{Z}$ tal que, para $\nu \gg 0$ se tiene:

$$FHS_A(\nu) = m\nu + n.$$

Ejercicio. (Este resultado es parte de la demostración). Sea (i_0, j_0) el exponente, para el orden lexicográfico de la forma inicial de f, y sea $\Delta = (i_0, j_0) + \mathbf{N}^2$ el cuadrante que determina en $\mathbf{N}^2$. Sea $\nu \geq m$ y sean $\xi = X/1$ y $\eta = Y/1$ en $k[X, Y]_{(X,Y)}$.

Probar que las clases

$$\left\{ \xi^i \eta^j + \langle f/1 \rangle \mid i + j = \nu,\ (i, j) \notin \Delta \right\}$$

son una base del $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $\mathfrak{m}^\nu / \mathfrak{m}^{\nu+1}$.

Teorema (de caracterización de puntos lisos de curvas planas). Sea C una curva irreducible. Sea P un punto de C. Entonces P es no singular si y sólo si $\mathcal{O}_P(C)$ es un anillo de valoración discreta. En ese caso, toda recta pasando por P y no tangente a C en P define un parámetro de uniformización en $\mathcal{O}_P(C)$.

1.3.- Valoraciones discretas.

Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo.

Definición. Se llama valoración discreta de $\mathbf{K}$ toda aplicación sobreyectiva $v : \mathbf{K} \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ verificando:

1. $v(ab) = v(a) + v(b)$.
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Notación. Si v es una valoración discreta de $\mathbf{K}$, se escribe $v(0) = +\infty$.

Ejemplos de valoraciones.

1.- Sea p un número primo. Todo racional no nulo a/b se puede escribir de forma única $p^r(a'/b')$ con a' y b' primos con p, donde $r \in \mathbf{Z}$. Sea $v_p : \mathbf{Q} \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ la aplicación que asocia a cada a/b el entero r. Entonces v_p es una valoración discreta de $\mathbf{Q}$.

2.- Sea $a \in \mathbf{k}$. Cada fracción no nula f/g en $\mathbf{k}(x)$ se puede escibir de forma única $(x - a)^r(f'/g')$, con f' y g' primos con $x - a$. Sea $v_a : \mathbf{k}(x) \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ la aplicación que asocia a cada f/g el entero r. v_a es una valoración discreta de $\mathbf{k}(x)$.

3.- Sea $\mathbf{k}((X))$, el cuerpo de cocientes del anillo de series formales $\mathbf{k}[[X]]$. Para cada elemento de $\mathbf{k}((X))$, f/g escribimos

$$\frac{f}{g} = \frac{X^\nu f'}{X^\mu g'}, \text{ con } f' \text{ y } g' \text{ unidades en } \mathbf{k}[[X]].$$

Esta escritura es única y permite definir una valoración v en $\mathbf{k}((X))$ en la forma $v(f/g) = \nu - \mu$.

Proposición. (Ver relación de ejercicios). Sea v una valoración discreta de un cuerpo $\mathbf{K}$. El conjunto $A_v = \{a \in \mathbf{K} \mid v(a) \geq 0\}$ es un anillo de valoración discreta con cuerpo de cocientes $\mathbf{K}$. El ideal maximal de A_v es el conjunto de elementos a tales que $v(a) > 0$.