ALGEBRA IV (1999-00)

F.J. Castro Jiménez J.M. Tornero Sánchez

Tema 2.- Anillos locales regulares. Puntos lisos de variedades. Criterio jacobiano de regularidad.

2.1.- Anillos locales regulares.

Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano de ideal maximal $\mathfrak{m}$. Recordemos que $\dim(A) \leq \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. En efecto, si las clases –módulo $\mathfrak{m}^2$– de $\{x_1, \ldots, x_d\} \subset \mathfrak{m}$ forman una base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, entonces, por el lema de Nakayama, la familia $\{x_1, \ldots, x_d\}$ genera a $\mathfrak{m}$ y entonces $d \geq \dim(A)$.

Definición. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. Se dice que A es regular si $\dim(A) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Nota. Sea A un dominio que no sea un cuerpo. A es un anillo de valoración discreta si y sólo si A es regular y de dimensión 1 . En efecto, si A es de valoración discreta entonces, por los resultados del tema 1, A tiene dimensión 1. Recíprocamente, si A es regular y de dimensión 1, entonces $\dim_{\mathbf{k}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ (aquí $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$). Sea $t + \mathfrak{m}^2$ una base de ese espacio vectorial. Por el lema de Nakayama t genera a $\mathfrak{m}$ y por tanto A es un anillo de valoración discreta.

Teorema (de caracterización de los anillos locales regulares). Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, noetheriano, de dimensión d. Sea $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$. Son equivalentes:

1. $gr_{\mathfrak{m}}(A)$ es isomorfo, como anillo graduado, a un anillo de polinomios $\mathbf{k}[y_1, \ldots, y_d]$.
2. A es regular.
3. $\mathfrak{m}$ puede ser generado por d elementos.

Nota. Observaciones a la demostración del teorema.

(A) Sea $B = \oplus_{i \geq 0} B_i$ una k-álgebra graduada y finitamente generada. Supongamos que $B_0 = k$ y que los elementos de B_1 generan B como k-álgebra. Entonces cada B_i es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces la función

$$FHS_B^{(1)}(\nu) = \dim_k B_\nu, \ \forall \nu \in \mathbf{N},$$

se denomina función (1) de Hilbert–Samuel de B y coincide, para $\nu >> 0$ con un polinomio en $\mathbf{Q}[X]$, que denominamos polinomio (1) de Hilbert–Samuel de B, notado $PHS_B^{(1)}$. La función (0) de Hilbert–Samuel de B (que es la que se conoce comúnmente por función de Hilbert–Samuel) es la definida por

$$FHS_B^{(0)}(\nu) = \sum_{i=0}^{\nu} \dim B_i, \ \forall \nu \in \mathbf{N},$$

que así mismo coincide con un polinomio $PHS_B^{(0)}$, para valores suficientemente grandes de ν. El grado de este polinomio se denota $d(B)$ y verifica que $d(B) = \text{grado}\left(PHS_B^{(1)}\right) + 1$.

(B) En las condiciones anteriores, si N es un B–módulo graduado, finitamente generado, entonces, para cada elemento homogéneo de grado positivo $f \in B$, no divisor de cero en N, se tiene $d(N/(f)N) = d(N) - 1$.

(C) Por último consideremos $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local y $G = gr_{\mathfrak{m}}(A)$ el anillo graduado asociado. La función de Hilbert–Samuel de A se define por

$$FHS_A(\nu) = long_A \left(\frac{A}{\mathfrak{m}^\nu} \right).$$

Sin embargo, la propiedad aditiva de la longitud permite probar que

$$FHS_A(\nu) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \dim_{A/\mathfrak{m}} \left(\frac{\mathfrak{m}^j}{\mathfrak{m}^{j+1}} \right),$$

que toma los mismos valores, para $\nu >> 0$, que un polinomio de $\mathbf{Q}[X]$, denominado polinomio de Hilbert–Samuel de A, cuyo grado, por el Teorema de la dimensión, es $\dim(A)$. Observemos que

$$FHS_A(\nu) = FHS_G^{(0)}(\nu - 1),$$

pero $PHS_A(\nu)$ y $PHS_A(\nu + 1)$ tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder.

2.2.- Puntos lisos de variedades.

Supondremos, cuando sea necesario, que el cuerpo $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado.

Definición. Sea $f_1, \ldots, f_m$ una familia de polinomios de $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Sea $P \in \mathbf{k}^n$. Se llama matriz jacobiana de $f_1, \ldots, f_m$ en el punto P a la matriz

$$J_P(f_1, \ldots, f_m) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}.$$

Definición. Sea $Z \subset \mathbf{k}^n$ una variedad afín (irreducible) de dimensión d y sea $I = I(Z)$ el ideal de Z. Sea $P \in \mathbf{k}^n$ un punto de Z. Se dice que Z es no singular en P (o que $P \in Z$ es no singular) si la matriz $J_P(f_1, \ldots, f_m)$ tiene rango $n - d$, para alguna familia $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de generadores de I.

Nota. La definición anterior no depende del sistema de generadores del ideal $I = I(Z)$ y coincide con el concepto de punto no singular en los casos conocidos (curvas en el plano).

Definición. Dado un conjunto algebraico afín Z y un punto $P \in Z$, se define el anillo local de Z en P, notado $\mathcal{O}_P(Z)$, como $\mathcal{O}_P(Z) = A(Z)_{\mathfrak{m}_P}$, donde $\mathfrak{m}_P$ es el ideal maximal correspondiente a P en $A(Z)$.

Teorema (de caracterización algebraica de puntos no singulares). (O. Zariski, 1947). Sea Z una variedad afín (irreducible) y sea P un punto de Z. P es no singular si y sólo si $\mathcal{O}_P(Z)$ es regular.

Nota. De la demostración podemos deducir que para puntos no singulares $d = \dim(Z) = \dim(\mathcal{O}_P(Z)) \le \dim_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)$, donde $\mathfrak{n}$ es el ideal maximal del anillo local del punto. De aquí se tiene que rango$(J_P(\underline{f})) \le n - d$, para todo punto P de Z.

Proposición. Sea Z una variedad afín irreducible. El conjunto de puntos singulares de Z, que notaremos $Sing(Z)$, es un cerrado propio de Zariski.

2.3.- Puntos lisos de variedades proyectivas

Denotemos por S el anillo $\mathbf{k}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ y para cada d entero, S_d el espacio vectorial de los polinomios de S homogéneos de grado d. $S = \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} S_d$ es un anillo graduado. Se denota S^h el conjunto $\bigcup_{d \in \mathbf{N}} S_d$.

Recordemos que $\mathbf{P}_n(\mathbf{k}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$, donde U_i es el abierto (para la topología de Zariski de $\mathbf{P}_n(\mathbf{k})$) complementario de $\mathcal{V}^h(X_i)$. Denotemos $\phi_i : \mathbf{k}^n \to U_i$ la aplicación biyectiva definida por

$$\phi(b_1, \ldots, b_n) = (b_1 : \ldots : b_{i-1} : 1 : b_i : \ldots : b_n).$$

Sea Z un conjunto algebraico proyectivo (c.a.p.). Se denota $I^h(Z)$ el ideal generado por los polinomios homogéneos que se anulan en los puntos de Z y por $S^h(Z)$ el *anillo de coordenadas (proyectivas)* de Z, i.e.: $S^h(Z) = k[X_0, ..., X_n]/I^h(Z)$. $S^h(Z)$ es un anillo graduado. La componente homogénea de grado d de $S^h(Z)$ es

$$S_d^h(Z) = \frac{S_d + I^h(Z)}{I^h(Z)} \simeq \frac{S_d}{S_d \cap I^h(Z)}.$$

Así, un elemento $F + I^h(Z)$ es homogéneo (de grado d) si es de la forma $F' + I^h(Z)$ con F' un polinomio de S_d.

Si Z es irreducible, $I^h(Z)$ es primo y el anillo $S^h(Z)$ es un dominio. Se denota $K^h(Z)$ el cuerpo de cocientes de $S^h(Z)$. Consideremos el conjunto

$$K(Z) = \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{G}} \in K^h(Z) \,|\, \overline{F}, \overline{G} \text{ homogéneos, } \operatorname{grado}(\overline{F}) = \operatorname{grado}(\overline{G}) \right\}.$$

Lema. Si Z es un conjunto algebraico proyectivo irreducible, entonces $K(Z)$ es un subcuerpo de $K^h(Z)$.

Definición. Sea Z un c.a.p. irreducible. El cuerpo $K(Z)$ es llamado el cuerpo de funciones racionales sobre Z. Sea $P \in Z$. Se llama anillo local de Z en P al anillo

$$\mathcal{O}_P(Z) = \left\{ \frac{\xi}{\xi'} \in K(Z) \,|\, \xi'(P) \neq 0 \right\}.$$

Proposición. El conjunto $\mathcal{O}_P(Z)$ es efectivamente un anillo local. Su ideal maximal es

$$\mathfrak{m}_P(Z) = \left\{ \frac{\xi}{\xi'} \in \mathcal{O}_P(Z) \,|\, \xi(P) = 0 \right\}.$$

Observación. Recordemos que disponemos de la aplicación "homogeneización"

$$\phi : \mathbf{k}[Y_1, \dots, Y_n] \to S = \mathbf{k}[X_0, X_1, \dots, X_n]$$

y del morfismo "deshomogeneización"

$$dh : \mathbf{k}[X_0, X_1, \dots, X_n] \to \mathbf{k}[Y_1, \dots, Y_n]$$

que es el morfismo de $\mathbf{k}$-álgebras definido por $dh(X_i) = Y_i$, si $i = 1, \dots, n$ y $dh(X_0) = 1$.

Si I es un ideal de $\mathbf{k}[Y_1, \dots, Y_n]$, se denota I^h el ideal de S generado por los homogeneizados de los elementos de I.

Sea W un subconjunto de $\mathbf{P}_n(\mathbf{k})$. Se denota $\overline{W}$ la clausura de W para la topología de Zariski. Si Z es un subconjunto de $\mathbf{k}^n$, notaremos $\overline{Z}$ en lugar de $\overline{\phi_0(Z)}$.

Lema. Si Z es un conjunto algebraico afín (en $\mathbf{k}^n$) entonces $\overline{Z} = \mathcal{V}^h(I(Z)^h)$.

Proposición. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea Z un conjunto algebraico afín irreducible (en $\mathbf{k}^n$). Entonces existe un isomorfismo canónico entre $K(\overline{Z})$ y $K(Z)$. Sea $P \in Z$, entonces existe un isomorfismo canónico entre $\mathcal{O}_P(\overline{Z})$ y $\mathcal{O}_P(Z)$. En particular, $\mathcal{O}_P(\overline{Z})$ es un anillo (local) noetheriano.

Sea ahora W un c.a.p. en $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(\mathbf{k})$. Podemos recubrir W por los conjuntos $W \cap U_i$ ($i = 0, \dots, n$). Como ϕ_i es un homeomorfismo, $W \cap U_i$ es (mediante ϕ_i^{-1}) un cerrado en $\mathbf{k}^n$.

Ejercicio. Si W es un c.a.p. y ninguna componente irreducible de W está contenida en $H_i = \mathcal{V}^h(X_i)$, entonces $\overline{W \cap U_i} = W$.

Nota. Sea P un punto de un c.a.p. irreducible Z. Existe i tal que $P \in Z \cap U_i = Z'$ (Z no puede estar contenido en $\cap H_i$). Entonces $\overline{Z'} = Z$ y el anillo $\mathcal{O}_P(Z)$ es un anillo local noetheriano.

Definición. Diremos que, en la situación anterior, P es un punto singular de Z si $\mathcal{O}_P(Z)$ no es un anillo local noetheriano regular. Un punto liso será un punto no singular.

2.4.- Espacios multiproyectivos.

Sea G un semigrupo (notado aditivamente) conmutativo con elemento neutro (que notaremos e). Sea S un anillo G-graduado. Es decir, S es un anillo (conmutativo y con elemento unidad) y existe una familia S_g de subgrupos aditivos de S tal que:

1. $S = \oplus_{g\in G} S_g$.
2. $S_g S_h \subset S_{g+h}$ para $g, h \in G$
3. $1 \in S_e$.

Ejemplos. Son conocidos los siguientes anillos graduados:

(1). $G = \mathbf{N}$, $S = \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ y para cada $d \in \mathbf{N}$, S_d es el $\mathbf{k}$-espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado d (se recuerda que 0 es, por definición, homogéneo de cualquier grado).

(2). $G = \mathbf{N}^2$, $S = \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_m]$ y para cada $g = (g_1, g_2) \in \mathbf{N}^2$, S_g es el $\mathbf{k}$-espacio vectorial

$$S_g = \bigoplus_{|\alpha|=g_1, |\beta|=g_2} k \cdot X^\alpha Y^\beta.$$

(3). Sea $r \in \mathbf{N}$ y n_i (para $i = 1, \ldots, r$) un entero positivo. Se considera, para cada $i = 1, \ldots, r$, un conjunto de variables $\{X_{i,0}, \ldots, X_{i,n_i}\}$. Se denota por $S = \Sigma(\underline{n})$ al anillo de polinomios

$$\mathbf{k}[X_{1,0}, \ldots, X_{1,n_1}, X_{2,0}, \ldots, X_{2,n_2}, \ldots, X_{r,0}, \ldots, X_{r,n_r}].$$

Sea $g = (g_1, \ldots, g_r) \in \mathbf{N}^r$, se denota S_g el $\mathbf{k}$-espacio vectorial

$$S_g = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{\alpha^i \in \mathbf{N}^{n_i+1}, |\alpha^i|=g_i} k \cdot (X_{(i)})^{\alpha^i}.$$

Donde $X_{(i)}$ representa el vector $(X_{i,0}, \ldots, X_{i,n_i})$. La familia anterior define una $\mathbf{N}^r$-graduación en S.

(4). Sea $R = \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_m]$ y sea S el anillo

$$R[X_{1,0}, \ldots, X_{1,n_1}, X_{2,0}, \ldots, X_{2,n_2}, \ldots, X_{r,0}, \ldots, X_{r,n_r}].$$

(con la notación de variables $X_{i,j}$ del ejemplo anterior). Para cada $g \in \mathbf{N}^r$, se denota

$$S_g = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{\alpha^i \in \mathbf{N}^{n_i+1}, |\alpha^i|=g_i} R \cdot (X_{(i)})^{\alpha^i}.$$

S_g es un R-módulo finitamente generado. La familia $\{S_g\}$ define una graduación en S.

Los elementos de $\cup_{g\in G} S_g$ son (por definición) los elementos homogéneos (o elementos G-homogéneos) de S. Los elementos de S_g se dirán homogéneos de G-grado g (o simplemente de grado g, si no hay confusión posible). Todo elemento (no nulo) F de S se escribe (de forma única) como suma finita de elementos homogéneos no nulos. Cada uno de éstos se llama "una componente homogénea de F".

En los ejemplos 3 y 4 los elementos de S_g se dirán también multihomogéneos de multigrado $g = (g_1, \ldots, g_r)$.

Definición. Sea S un anillo G-graduado. Un ideal J de S se dice homogéneo (o G-homogéneo) si está generado por elementos homogéneos de S. Si $S = \Sigma(\underline{n})$ es el anillo del ejemplo 3 o el anillo del ejemplo 4, un ideal $\mathbf{N}^r$-homogéneo de S se dirá también multihomogéneo.

Proposición. Sea J un ideal de S. Son equivalentes:

1. J es homogéneo.

2. Para todo $F \in S$, F está en J si y sólo si cada componente homogénea de F está en J.

Proposición. Con las notaciones anteriores, si J es un ideal homogéneo de S entonces el anillo cociente S/J admite una graduación natural (llamada la graduación cociente).

Un elemento F homogéneo de $\Sigma(\underline{n})$ define una aplicación (que también notaremos F)

$$F : \mathbf{P}(\underline{n}) = \mathbf{P}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}_{n_r} \to \{0, 1\} \subset \mathbf{N}$$

de la forma siguiente: Si $P = (P_1, \dots, P_r) \in \mathbf{P}(\underline{n})$, pongamos $P_i = (a_{i0} : \cdots : a_{in})$; definimos $F(P) = 0$ si $F(a_{10}, \dots, a_{1n_1}, a_{20}, \dots, a_{2n_2}, \dots, a_{r0}, \dots, a_{rn_r}) = 0$ y $F(P) = 1$ en otro caso. Nótese que la definición es consistente debido a la (multi)homogeneidad de F.

Definición. Sea $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}^r$ y sea $\mathbf{P}(\underline{n}) = \mathbf{P}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}_{n_r}$. Sea J un ideal (multi)homogéneo de $\Sigma(\underline{n})$. Se llama *conjunto algebraico multiproyectivo* de $\mathbf{P}(\underline{n})$ a cualquier subconjunto de $\mathbf{P}(\underline{n})$ de la forma

$$\mathcal{V}(T) = \{P \in \mathbf{P}(\underline{n}) \,|\, F(P) = 0, \forall F \in T\}$$

donde T es un subconjunto de polinomios homogéneos de $\Sigma(\underline{n})$.

Proposición. La familia de conjuntos algebraicos multiproyectivos de $\mathbf{P}(\underline{n})$ es la familia de cerrados de una topología en $\mathbf{P}(\underline{n})$, que llamaremos la *topología de Zariski* de $\mathbf{P}(\underline{n})$.

Ejercicio. Probar que la topología de Zariski en $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ es más fina que la topología producto (de las de Zariski) en $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$, salvo que el cuerpo base sea finito.

Definición Sea W un subconjunto de $\mathbf{P}(\underline{n})$. Se define el ideal de W como el ideal de $\Sigma(\underline{n})$ (notado $I(W)$) definido por

$$I(W) = \left\langle \left\{ F \in \bigcup_{g \in \mathbf{N}^r} \Sigma(\underline{n})_g \,|\, F(P) = 0, \forall P \in W \right\} \right\rangle.$$

Proposición. Para cada subconjunto W de $\mathbf{P}(\underline{n})$, el ideal $I(W)$ es multi-homogéneo en $\Sigma(\underline{n})$. Además, si W es un cerrado, W es irreducible si y sólo si $I(W)$ es un ideal primo.

Un cerrado irreducible de $\mathbf{P}(\underline{n})$ se dirá una variedad algebraica multiproyectiva.

Si Z es un conjunto algebraico multiproyectivo (c.a.mp.) el anillo cociente

$$\Sigma(Z) := \frac{\Sigma(\underline{n})}{I(Z)}$$

(que es multigraduado) será llamado el anillo de coordenadas de Z en $\mathbf{P}(\underline{n})$. Por el resultado anterior, $\Sigma(Z)$ es un dominio de integridad si y sólo si Z es irreducible. Si Z es irreducible, notaremos $Q(Z)$ el cuerpo de fracciones[1] de $\Sigma(Z)$.

Sea Z un c.a.mp. irreducible de $\mathbf{P}(\underline{n})$. Notemos

$$K(Z) = \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{G}} \in Q(Z) \,|\, \overline{F}, \overline{G} \text{ son homogéneos y del mismo grado} \right\}.$$

Si P es un punto de un c.a.mp. irreducible Z en $\mathbf{P}(\underline{n})$, llamaremos anillo local de Z en P, notado $(\mathcal{O}_P(Z)m, \mathfrak{m}_P(Z))$ a

$$\mathcal{O}_P(Z) = \left\{ \frac{\xi}{\xi'} \in K(Z) \,|\, \xi'(P) \neq 0 \right\}, \quad \mathfrak{m}_P(Z) = \left\{ \frac{\xi}{\xi'} \in \mathcal{O}_P(Z) \,|\, \xi(P) = 0 \right\},$$

que es, efectivamente, un anillo local.

[1] Hay que tener aquí un poco de cuidado con la notación. Comparar con 2.3.

2.5.- Espacios mixtos.

La teoría desarrolada más arriba sobre la topología de Zariski sobre el espacio multiproyectivo $\mathbf{P}(\underline{n})$ puede extenderse al caso más general de los espacios mixtos. Un espacio mixto es un conjunto de la forma $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$ donde $\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^m(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^m$ es el espacio afín m-dimensional. Aquí m es mayor o igual que 0. Por convenio $\mathbf{A}^0$ representa el espacio afín con un único punto.

Podemos definir una topología en $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$ de manera análoga a como hemos hecho en $\mathbf{P}(\underline{n})$. Consideremos el anillo $S = \Sigma(m, \underline{n})$ del ejemplo 4.

Definición.- Sea $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{N}^r$ y sea $m \geq 0$. Sea J un ideal (multi)homogéneo de $\Sigma(m, \underline{n})$. Se llama *conjunto algebraico mixto* de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$ a cualquier subconjunto de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$ de la forma

$$\mathcal{V}(T) = \{P = (P_1, P_2) \in \mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m \mid F(P_1, P_2) = 0, \forall F \in T\}$$

donde T es un subconjunto de polinomios (multi)-homogéneos de $\Sigma(m, \underline{n})$.

Proposición. La familia de conjuntos algebraicos mixtos de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$ es la familia de cerrados de una topología en $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$, que llamaremos la *topología de Zariski* de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$.

Ejercicio. Probar que la topología de Zariski en $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{A}^1$ es más fina que la topología producto (de las de Zariski) en $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{A}^1$, salvo que el cuerpo base sea finito.

Definición. Sea W un subconjunto de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$. Se define el ideal de W como el ideal de $\Sigma(m, \underline{n})$ (notado $I(W)$) generado por

$$\left\{ F \in \bigcup_{g \in \mathbf{N}^r} \Sigma(m, \underline{n})_g \mid F(P) = 0, \forall P \in W \right\}.$$

Proposición. Para cada subconjunto W de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$, el ideal $I(W)$ es multi-homogéneo en $\Sigma(m, \underline{n})$. Además, si W es un cerrado, W es irreducible si y sólo si $I(W)$ es un ideal primo.

Un cerrado irreducible de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$ se dirá una variedad algebraica mixta.

Si Z es un conjunto algebraico mixto (c.a.m.) el anillo cociente $\Sigma(Z) := \Sigma(m, \underline{n})/I(Z)$ (que es multigraduado) será llamado el anillo de coordenadas de Z en $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$. $\Sigma(Z)$ es un dominio de integridad si y sólo si Z es irreducible. Si Z es irreducible, notaremos $Q(Z)$ el cuerpo de fracciones[2] de $\Sigma(Z)$.

Sea Z un c.a.m. irreducible de $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$. Notemos

$$K(Z) = \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{G}} \in Q(Z) \mid \overline{F}, \overline{G} \text{ son homogéneos y del mismo grado} \right\}.$$

Si P es un punto de un c.a.m. irreducible Z en $\mathbf{P}(\underline{n}) \times \mathbf{A}^m$, se dirá el anillo local de Z en P, notado $(\mathcal{O}_P(Z), \mathfrak{m}_P(Z))$ al anillo local

$$\left(\left\{ \frac{\xi}{\xi'} \in K(Z) \mid \xi'(P) \neq 0 \right\}, \ \mathfrak{m}_P(Z) = \left\{ \frac{\xi}{\xi'} \in \mathcal{O}_P(Z) \mid \xi(P) = 0 \right\} \right).$$

[2] Cuidado con la notación nuevamente.