Nota.- Las notas de este tema son un resumen de los resultados probados en clase (de teoría o de prácticas). Francisco J. Castro Jiménez, José M. Tornero Sánchez y José M. Ucha Enríquez han participado en la confección de las mismas. Para su realización hemos consultado la bibliografía citada al final del programa de la asignatura.

Tema 2.- Anillos locales regulares. Puntos lisos de variedades. Criterio jacobiano de regularidad

2.1 Anillos locales regulares

Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano de ideal maximal $\mathfrak{m}$. Recordemos que $\dim(A) \leq \dim_{\mathbf{k}}(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2})$ (si las clases –módulo $\mathfrak{m}^2$– de $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \mathfrak{m}$ forman una base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, entonces, por el lema de Nakayama, la familia $\{x_1, \ldots, x_r\}$ genera a $\mathfrak{m}$. Entonces, por el teorema de la dimensión, $r \geq \dim(A)$).

Definición 2.1.1 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. Se dice que A es regular si* $\dim(A) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Nota 2.1.2 *Sea A un dominio que no sea un cuerpo. A es un anillo de valoración discreta si y sólo si A es regular y de dimensión 1 . En efecto, si A es de valoración discreta entonces, por los resultados del tema 1, A tiene dimensión 1. Recíprocamente, si A es regular y de dimensión 1, entonces $\dim_{\mathbf{k}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ (aquí $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$). Sea $t + \mathfrak{m}^2$ una base de ese espacio vectorial. Por el lema de Nakayama t genera a $\mathfrak{m}$ y por tanto A es un anillo de valoración discreta.*

Teorema 2.1.3 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, noetheriano, de dimensión d. Sea $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$. Son equivalentes:*

1. $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ *es isomorfo, como anillo graduado, a un anillo de polinomios* $\mathbf{k}[y_1, \ldots, y_d]$.
2. *A es regular.*
3. *$\mathfrak{m}$ puede ser generado por d elementos.*

2.2 Puntos lisos de variedades afines.

Supondremos, cuando sea necesario, que el cuerpo $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado.

Sea $f_1, \ldots, f_m$ una familia de polinomios de $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Sea $P \in \mathbf{k}^n$. Se llama matriz jacobiana de $f_1, \ldots, f_m$ en el punto P a la matriz $J_P(f_1, \ldots, f_m) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

Definición 2.2.1 *Sea $Z \subset \mathbf{k}^n$ una variedad afín (irreducible) de dimensión d y sea $I = I(Z)$ el ideal de Z. Sea $P \in \mathbf{k}^n$ un punto de Z. Se dice que Z es no singular en P (o que $P \in Z$ es no singular) si la matriz $J_P(f_1, \ldots, f_m)$ tiene rango $n - d$, para alguna familia $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de generadores de I.*

Nota 2.2.2 *La definición anterior no depende del sistema de generadores del ideal $I = I(Z)$.*

Se denota por $\mathcal{O}_P(Z)$ el anillo local de Z en P.

Teorema 2.2.3 (O. Zariski, 1947) *Sea Z una variedad afín (irreducible) y sea P un punto de Z. P es no singular si y sólo si $\mathcal{O}_P(Z)$ es regular.*

Demostración. Sea $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{k}^n$. Sea $\phi : \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbf{k}^n$ el morfismo de $\mathbf{k}$–espacios vectoriales definido por

$$\phi(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right).$$

Sea $\mathfrak{m}$ el ideal $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$. La restricción de ϕ a $\mathfrak{m}$ es sobreyectiva (pues $\phi(X_i - a_i)$ es el i–ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{k}^n$). Además, $\phi(\mathfrak{m}^2) = \{0\}$. Es claro que ϕ induce un isomorfismo de $\mathbf{k}$–espacios vectoriales $\widetilde{\phi} : \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \to \mathbf{k}^n$ (pues dicho morfismo es sobreyectivo, entre espacios de la misma dimensión). Sea $\mathfrak{a}$

el ideal de Z y elijamos una familia $\{f_1, \dots, f_m\}$ de generadores de $\mathfrak{a}$. Tomemos el punto P en Z. Se tiene $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. El $\mathbf{k}$–espacio vectorial $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}$ está generado por las clases (módulo $\mathfrak{m}^2$) de los f_i. Así, $\dim_{\mathbf{k}}(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}) = \dim_{\mathbf{k}}(\widetilde{\phi}(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2})) = \text{rango}(J_P(f_1, \dots, f_m)$ (ya que $\phi(f_i)$ es la fila i–ésima de la matriz jacobiana de los (f_j) en P). Por otra parte, se tiene la siguiente sucesión exacta de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales

$$0 \to \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2} \to \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \to \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2} \to 0. \quad [*]$$

Notemos $\mathfrak{n}$ el ideal maximal de $\mathcal{O}_P(Z)$. Es decir, $\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}\mathcal{O}_P(Z)$. Se tiene por tanto un isomorfismo (de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales) $\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2} \simeq \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2}$. Finalmente, usando [*], obtenemos la igualdad $n = \text{rango}(J_P(f_1, \dots, f_m)) + \dim_{\mathbf{k}}(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2})$. Así, $\dim_{\mathbf{k}}(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2}) = \dim(Z) = \dim(\mathcal{O}_P(Z))$ si y sólo si P es no singular. $\square$

Nota 2.2.4 *Como* $d = \dim(Z) = \dim(\mathcal{O}_P(Z)) \leq \dim_{\mathbf{k}}(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2})$*, se tiene* $\text{rango}(J_P(\underline{f})) \leq n - d$*, para todo punto* P *de* Z*.*

Si $Z \subset \mathbf{k}^n$ es un conjunto algebraico arbitrario y $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_r$ es la descomposición en unión de componentes irreducibles, diremos que un punto de Z que esté en más de una componente es un punto singular (en Z). Si por el contrario el punto P de Z está en una sola componente Z_i diremos que P es singular (en Z) si y sólo si lo es en Z_i. Notemos que si $P \in Z$ está en una sola componente Z_i entonces los anillos locales $\mathcal{O}_P(Z)$ y $\mathcal{O}_P(Z_i)$ son naturalmente isomorfos.

El anillo local de Z (irreducible) en $P \in Z$ tiene otra interpretación. Si $K(Z)$ es el cuerpo de cociente del anillo de coordenadas $A(Z)$ (es decir, el cuerpo de funciones racionales sobre Z), se dice que una función racional $\zeta \in K(Z)$ está definida en $P \in Z$ si existen polinomios f, g tales que $\zeta = \overline{f}/\overline{g}$ con $g(P) \neq 0$. Entonces el conjunto de las funciones racionales definidas en $P \in Z$ es un anillo local isomorfo a $\mathcal{O}_P(Z)$.