# Tema 3.- Funciones y morfismos racionales sobre variedades. Explosiones.

En lo que sigue $\mathbf{k}$ denotará un cuerpo algebraicamente cerrado.

## 3.1.- Funciones regulares sobre variedades afines.

Sea $V$ un c.a.a. (no vacío) de $\mathbf{k}^m$. Si $f \in \mathbf{k}[Y] = \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_m]$, se denota por $D_V(f)$ el conjunto

$$\{P \in V \mid f(P) \neq 0\}.$$

El conjunto $D_V(f)$ es abierto en $V$ pues es el complementario (en $V$) del cerrado $V \cap \mathcal{V}(f)$. Es claro que $D_V(f)$ sólo depende de $\overline{f} \in A(V)$. Notaremos indistintamente $D_V(\overline{f})$ y $D_V(f)$.

**Definición.** Sea $U \subset V$ un abierto no vacío de $V$. Una aplicación $\phi : U \to \mathbf{k}$ se dice regular en un punto $P$ de $U$ si existen $f, g \in \mathbf{k}[Y]$ tales que:

- $P \in D_V(g) \subset U$.
- $\phi = f/g$ sobre $D_V(g)$.

Se denota $\mathcal{O}(U)$ el conjunto de las funciones regulares en todos los puntos de $U$. El conjunto $\mathcal{O}(U)$ tiene estructura natural de $\mathbf{k}$-álgebra.

**Observación.** Existe un morfismo de $\mathbf{k}$-álgebras

$$\Phi_U : A(V) \to \mathcal{O}(U)$$

definido de la manera natural: $\Phi_U(\overline{f})(P) = f(P)$ para todo $P \in U$. El morfismo $\Phi_U$ es inyectivo (ejercicio).

**Nota.** Si $\phi \in \mathcal{O}(U)$ entonces existe, para cada $P$ en $U$ un par de polinomios $(f_P, g_P)$ tales que:

- $P \in D_V(g_P) \subset U$.
- $\phi = f_P/g_P$ sobre $D_V(g_P)$.

Así,

$$U = \bigcup_{P \in U} D_V(g_P),\ V \setminus U = V \setminus \bigcup_{P \in U} D_V(g_P) = V \bigcap \left( \bigcap_{P \in U} \mathcal{V}(g_P) \right).$$

Existe, por la noetherianidad de $\mathbf{k}[Y]$, una familia finita de puntos $P_1, \ldots, P_s$ en $U$ tales que

$$U = \bigcup_{i=1}^{s} D_V(g_{P_i})$$

y entonces $\phi = f_{P_i}/g_{P_i}$ sobre $D_V(g_{P_i})$.

**Proposición.** Sea $V$ un c.a.a. no vacío (en $\mathbf{k}^m$) y sea $\overline{g} \in A(V)$, $\overline{g} \neq 0$. Notemos $U = D_V(g)$. Sea $\phi \in \mathcal{O}(U)$. Entonces existe $(f, l) \in \mathbf{k}[Y] \times \mathbf{N}$ tal que $\phi = f/g^l$.

**Corolario.** El morfismo $\Phi_V : A(V) \to \mathcal{O}(V)$ es un isomorfismo de $\mathbf{k}$-álgebras.

## 3.2.- Funciones regulares sobre variedades proyectivas

Sea $V$ un c.a.p. (no vacío) de $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(\mathbf{k})$. Si $F \in \mathbf{k}[X] = \mathbf{k}[X_0, X_1, \ldots, X_m]$ es homogéneo, se denota por $D_V(F)$ el conjunto

$$\{P \in V \mid F(P) \neq 0\}.$$

El conjunto $D_V(F)$ es abierto en $V$ pues es el complementario (en $V$) del cerrado $V \cap \mathcal{V}^h(F)$. Es claro que $D_V(F)$ sólo depende de $\overline{F} \in S^h(V)$. Notaremos en algunos casos $D_V(\overline{F})$ en lugar de $D_V(F)$.

**Definición** Sea $U \subset V$ un abierto no vacío de $V$. Una aplicación $\phi : U \to \mathbf{k}$ se dice regular en un punto $P$ de $U$ si existen $F, G \in \mathbf{k}[X]$, homogéneos y del mismo grado, tales que:

- $P \in D_V(G) \subset U$.
- $\phi = F/G$ sobre $D_V(G)$.

Se denota $\mathcal{O}_V(U)$ el conjunto de las funciones regulares en todos los puntos de $U$, o bien $\mathcal{O}(U)$ cuando no se presta a confusión. El conjunto $\mathcal{O}(U)$ tiene estructura natural de $\mathbf{k}$-álgebra. Existe un morfismo de $\mathbf{k}$-álgebras

$$\Phi_U : \mathbf{k} \to \mathcal{O}(U).$$

**Nota** Si $\phi \in \mathcal{O}(U)$ entonces existe, para cada $P$ en $U$ un par de polinomios $(F_P, G_P)$ (homogéneos del mismo grado) tales que:

- $P \in D_V(G_P) \subset U$
- $\phi = F_P/G_P$ sobre $D_V(G_P)$.

Así, se tiene de manera análoga al caso afín,

$$U = \bigcup_{P \in U} D_V(G_P),\; V \setminus U = V \setminus \bigcup_{P \in U} D_V(G_P) = V \bigcap \left( \bigcap_{P \in U} \mathcal{V}(G_P) \right).$$

Existe, por la noetherianidad de $\mathbf{k}[X]$, una familia finita de puntos $P_1, \ldots, P_s$ en $U$ tales que

$$U = \bigcup_{i=1}^{s} D_V(G_{P_i})$$

y $\phi = (F_{P_i})/(G_{P_i})$ sobre $D_V(G_{P_i})$.

**Proposición.** Sea $V$ un c.a.p. no vacío (en $\mathbf{P}_n$) y sea $\overline{G} \in S^h(V)$, $\overline{G}$ homogéneo, no constante. Notemos $U = D_V(G)$. Sea $\phi \in \mathcal{O}(U)$. Entonces existe $(F, l) \in \mathbf{k}[X] \times \mathbf{N}$ tal que:

1. $F$ es homogéneo y grado$(F) = l \cdot$ grado$(G)$.
2. $\phi = F/G^l$.

**Proposición.** Sea $V$ un c.a.a. (o c.a.p.) no vacío y sea $U$ un abierto propio de $V$. Si $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, entonces $\varphi$ es una aplicación continua de $U$ en $\mathbf{k}$ (ambos espacios con la topología de Zariski).

**Observación.** En las condiciones anteriores, si $U_1$ y $U_2$ son dos abiertos de $V$, $\varphi_i \in \mathcal{O}(U_i)$, y $U$ es un abierto denso de $U_1 \cap U_2$, se tiene que

$$\varphi_1|_U = \varphi_2|_U \implies \varphi_1|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

## 3.3.- Funciones racionales sobre variedades.

Sea $V$ un c.a.a. (o c.a.p.) irreducible no vacío. Definimos

$$\mathcal{F} = \{(U, \varphi) \mid U \text{ abierto no vacío de } V,\ \varphi \in \mathcal{O}(U)\},$$

y dotamos a este conjunto con la relación de equivalencia

$$(U, \varphi) \simeq (W, \psi) \iff \varphi|_{U\cap W} = \psi|_{U\cap W}.$$

**Observación.** La relación anterior es, efectivamente de equivalencia, y el conjunto cociente, que denotaremos $R(V) = \mathcal{F}/\simeq$ posee una estructura natural de $\mathbf{k}$-álgebra. En $R(V)$ notaremos la clase del par $(U, \varphi)$ por $[(U, \varphi)]$.

**Nota.** Sea $C = [(U, \varphi)] \in R(V)$. Consideremos el conjunto

$$AB(C) = \{U' \mid U' \text{ abierto no vacío de } V \text{ y } \exists \varphi' \text{ con } (U', \varphi') \in C\}.$$

Si consideramos el abierto

$$W = \bigcup_{U' \in AB(C)} U',$$

y definimos $\psi \in \mathcal{O}(W)$ como

$$\psi(P) = \varphi'(P),\ \text{donde } P \in U' \in AB(C),\ (U', \varphi') \in C,$$

se tienen los dos siguientes resultados elementales:

(a) $(W, \psi) \in C$.

(b) $W$ es el mayor abierto en $AB(C)$.

Por este motivo $W$ se denomina abierto de definición de $C$, y $V \setminus W$ se llama el conjunto de polos de $C$.

**Proposición.** La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : K(V) & \longrightarrow & R(V) \\ \dfrac{\overline{f}}{\overline{g}} & \longmapsto & \left[\left(D_V(\overline{g}), \dfrac{\overline{f}}{\overline{g}}\right)\right] \end{array}$$

es un isomorfismo de anillos. En particular, $R(V)$ es un cuerpo.

**Teorema.** Sea $V$ c.a.p. La inyección $\psi : \mathbf{k} \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ es un isomorfismo de $\mathbf{k}$-álgebras.

## 3.4.- Morfismos de variedaes afines y proyectivas.

Sean $V$ y $W$ dos conjuntos algebraicos.

**Definición.** Una aplicación $\varphi : V \longrightarrow W$ se dice un morfismo de c.a. (o morfismo a secas) cuando se verifica:

(i) $\varphi$ es continua para las topologías de Zariski de $V$ y $W$.

(ii) Para todo abierto $U \subset W$ y para toda función regular $\psi \in \mathcal{O}_W(U)$, $\psi\varphi \in \mathcal{O}_V(\varphi^{-1}U)$.

Un morfismo biyectivo cuya inversa sea un morfismo se dirá isomorfismo[1].

**Proposición.** En las condiciones anteriores, si $W \subset \mathbf{A}^m$ es un c.a.a., son equivalentes:

(I) $\varphi$ es un morfismo.

(II) $\pi_i\varphi \in \mathcal{O}(V)$, donde $\pi_i$ son las proyecciones canónicas $\pi : W \to \mathbf{k}$, para todo $i = 1, ..., m$.

**Notación.** Denotaremos $Mor(V, W)$ al conjunto de morfismos de variedades de $V$ en $W$.

**Teorema.** Sean $V$ c.a., $W$ c.a.a. Entonces existe una aplicación natural y biyectiva

$$\Lambda : Mor(V, W) \longrightarrow \hom_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}(W), \mathcal{O}(V)),$$

donde $\hom_k(\cdot, \cdot)$ denota los homomorfismos de **k**-álgebras.

**Corolario.** Cuando $V$ y $W$ son c.a.a. se tienen además los siguientes resultados:

- $\Lambda$ lleva isomorfismos de variedades en isomorfismos de **k**-álgebras (llevando la identidad en la identidad).
- $V$ y $W$ son isomorfos si y sólo si lo son $A(W)$ y $A(V)$ como **k**-álgebras.

## 3.5.- Ampliación de los conceptos de variedad y morfismo.

**Definición.** Llamaremos variedad algebraica a un abierto de un cerrado (para la topología de Zariski, claro) de un espacio mixto $\mathbf{P}(\underline{n}, m) = \mathbf{P}_{n_1} \times ... \times \mathbf{P}_{n_r} \times \mathbf{A}^m$.

**Nota.** Recordemos (tema 2) que, si $V$ es un cerrado irreducible de un espacio mixto $\mathbf{P}(\underline{n}, m)$,

$$K(V) = \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{G}} \mid (0 \neq)\overline{G}, \overline{F} \in \Sigma(\underline{n}, m)/\mathcal{J}(V), \text{ homogéneos y grado}(\overline{F}) = \text{grado}(\overline{G}) \right\},$$

donde el grado se entiende como el multigrado en los distintos factores proyectivos.

**Definición.** En las condiciones de la definición anterior, para todo abierto no vacío $U \subset V$, se definen

$$K(U) = K(V),\ \mathcal{O}_V(U) = \left\{ \varphi \mid \forall P \in U, \exists \xi, \xi' \in \Sigma(\underline{n}, m)/\mathcal{J}(V) \text{ con } \varphi(P) = \frac{\xi(P)}{\xi'(P)},\ \xi'(P) \neq 0 \right\}.$$

Esta definición coincide con los casos ya estudiados de variedades afines y proyectivas.

**Definición.** Sean $U$ y $U'$ dos variedades. Una aplicación $\xi : U \to U'$ se dice un morfismo si:

1. Es continua.
2. Verifica que $\forall W \subset U'$ abierto no vacío y $\forall \varphi \in \mathcal{O}_{U'}(W)$, $\varphi\xi \in \mathcal{O}_U(\varphi^{-1}W)$.

**Notación.** El conjunto de morfismos entre $U$ y $U'$ se denota por $Mor(U, U')$.

**Definición.** Un morfismo biyectivo cuya aplicación inversa es un morfismo se denomina un isomorfismo. Así mismo, una variedad afín (proyectiva) es toda variedad isomorfa a un cerrado irreducible de un espacio afín (proyectivo).

[1] Atención: No basta con ser biyectiva, homeomorfismo y morfismo de variedades.

## 3.6.- Explosiones.

Sea $n \geq 2$ y consideremos el conjunto $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}_{n-1}$. En este espacio sea

$$X = \left\{ ((a_1, ..., a_n), (b_1 : ... : b_n)) \mid \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0, \ \forall i, j \right\}.$$

$X$ no es vacío porque $((0, ..., 0), Q) \in X$ para cualquier $Q \in \mathbf{P}_{n-1}$ y es cerrado en $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}_{n-1}$, porque

$$X = \mathcal{V}\left(X_i Y_j - X_j Y_i \mid 1 \leq i, j, \leq n\right),$$

donde consideramos las variables afines $X_1, ..., X_n$ y las variables proyectivas $Y_1, ..., Y_n$.

Consideremos así mismo la proyección

$$\begin{array}{rcl} \Pi : \mathbf{A}^n \times \mathbf{P}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{A}^n \\ (P, Q) & \longmapsto & P \end{array}$$

y definimos $\Pi|_X = \varphi$.

**Observación.** Dado $P \in \mathbf{A}^n$, $P \neq (0, ...0)$, se tiene que $\varphi^{-1}(P)$ consta de un solo punto, a saber

$$\varphi^{-1}(P) = \{(P, [P])\},$$

donde $[P]$ es el punto proyectivo definido por las coordenadas afines de $P$.

Como hemos hecho notar antes,

$$\varphi^{-1}(0, ..., 0) = (0, ..., 0) \times \mathbf{P}_{n-1}.$$

**Lema.** El morfismo biyectivo

$$\varphi|_{X \setminus \varphi^{-1}(0,...,0)} : X \setminus \varphi^{-1}(0, ..., 0) \longrightarrow \mathbf{A}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$$

es un isomorfismo de variedades.

**Nota.** De los resultados anteriores, podemos escribir $X$ como

$$X = X' \sqcup D,$$

donde $X' = X \setminus \varphi^{-1}(0, ..., 0)$ es isomorfo a $\mathbf{A}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ y $D = \varphi^{-1}(0, ..., 0)$ es isomorfo a $\mathbf{P}_{n-1}$.

**Lema.** $X$ es un cerrado irreducible de $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}_{n-1}$. $\varphi$ es un morfismo de variedades.

**Definición.** La aplicación $\Pi|_X$ se denomina explosión de $\mathbf{A}^n$ con centro el origen, $X$ se denomina el explotado de $\mathbf{A}^n$ y es frecuente llamar a $D$ el divisor excepcional de la explosión $\Pi$.

Recubrimos $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1$ con dos cartas afines, ambas isomorfas a $\mathbf{A}^3$,

$$\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1 = \left(\mathbf{A}^2 \times U_1\right) \cup \left(\mathbf{A}^2 \times U_2\right) = C_1 \cup C_2,$$

donde las ternas de coordenadas serán, respectivamente $(X, Y, V)$, provenientes de $((X, Y), (1 : V))$, y $(X, Y, U)$ (análogo). Como $X$ viene definido por la ecuación $XV = YU$, en la primera carta tendremos $X_1 = X \cap C_1 = \mathcal{V}(XV = Y)$ y en la segunda $X_2 = \mathcal{V}(X = YU)$.

$X_i$ es un cerrado irreducible (de hecho, una cuádrica irreducible) en $C_i \simeq \mathbf{A}^3$, pero además

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 : \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & X_1 \\ (X, V) & \longmapsto & (X, XV, V) \end{array}$$

es un morfismo de variedades que es claramente el inverso de $\varphi|_{X_1}$ por lo que $X_1 \simeq \mathbf{A}^2$ y, desde luego $X_2 \simeq \mathbf{A}^2$ de forma análoga. De esta forma podemos "ver" $X$ como la unión de dos planos (no disjuntos) $X_1$ y $X_2$, donde

$$X_1 \cap X_2 = \{(X, Y, V) \in X_1 \mid V \in \mathbf{k}^*\},$$

y análogamente para identificar los puntos de intersección en $X_2$.

Por último, denotaremos en lo que sigue

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 : \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 \\ (X, V) & \longmapsto & (X, XV) \end{array}$$

que es un morfismo que verifica $\psi_1 = \varphi|_{X_1}\xi_1$.

Vamos a estudiar a continuación la explosión de una variedad afín. Aunque algunos de los resultados que siguen se pueden generalizar a dimensión arbitraria, nos fijaremos en el caso que luego nos interesará: el de las curvas planas.

Sea $C \subset \mathbf{A}^2$ una curva irreducible, $(0,0) \in \mathcal{C}$ y $f = 0$ una de sus ecuaciones irreducibles. Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} X = X' \sqcup D \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1 \arrow[d, "\Pi"] \\ & \mathbf{A}^2 \end{tikzcd}$$

Consideremos $f = \sum f_j$ como suma de formas; $f_j$ homogénea de grado $j$ y supongamos que $f_m$ es la forma de menor grado no nula y $f_n$ la de mayor grado. Queremos estudiar el conjunto

$$\tilde{C} = \overline{\varphi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\})} \subset X.$$

**Lema.** Consideremos $\varphi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}) \cap X_1$. Identificando $X_1$ con $\mathbf{A}^2$, los puntos $(x, v)$ del conjunto anterior son los que tienen $x \neq 0$ y, además, verifican el polinomio

$$f^{(1)}(X, V) = \sum_{j=m}^{n} X^{j-m} f_j(1, V).$$

Este polinomio es irreducible. Notaremos $\mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{V}(f^{(1)}) \subset \mathbf{A}^2$.

**Observación.** Supongamos que la recta $X = 0$ no es tangente a $\mathcal{C}$ en el $(0,0)$. Entonces podemos suponer que las tangentes son todas de la forma

$$Y = \lambda_i X, \text{ con } i = 1, ..., s; \; \lambda_i \in \mathbf{k},$$

o, lo que es igual, salvo constante no nula,

$$f_m = \prod_{i=1}^{s} (Y - \lambda_i X)^{e_i}, \; \sum e_i = m, \; e_i > 0.$$

**Proposición.** En la situación anterior se tienen los siguientes resultados:

(a) $\mathcal{C}^{(1)} \cap \psi^{-1}(0,0) = \{(0, \lambda_i) \mid i = 1, ..., s\}$.

(b) $\mathrm{mult}_{(0,\lambda_i)}(C^{(1)}) \leq e_i$.

(c) En particular, si $(0,0)$ tiene $m$ tangentes distintas en $\mathcal{C}$ (lo que se denomina habitualmente punto múltiple ordinario), los puntos $(0, \lambda_i) \in \mathcal{C}^{(1)}$ son lisos.