Tema 3.- Funciones y morfismos racionales sobre variedades. Explosiones.

En lo que sigue $\mathbf{k}$ denotará un cuerpo algebraicamente cerrado.

3.1.- Funciones regulares sobre variedades afines.

Sea Z un conjunto algebraico afín (c.a.a.) (no vacío) de $\mathbf{k}^m$. Si $f \in \mathbf{k}[Y] = \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_m]$, se denota por $D_Z(f)$ el conjunto

$$\{P \in Z \mid f(P) \neq 0\}.$$

El conjunto $D_Z(f)$ es abierto en Z pues es el complementario (en Z) del cerrado $Z \cap \mathcal{V}(f)$. Es claro que $D_Z(f)$ sólo depende de $\overline{f} \in A(Z)$. Notaremos indistintamente $D_Z(\overline{f})$ y $D_Z(f)$.

Definición. Sea $U \subset Z$ un abierto no vacío de Z. Una aplicación $\phi : U \to \mathbf{k}$ se dice regular en un punto P de U si existen $f, g \in \mathbf{k}[Y]$ tales que:

- $P \in D_Z(g) \subset U$.
- $\phi = f/g$ sobre $D_Z(g)$.

Se denota $\mathcal{O}(U)$ el conjunto de las funciones regulares en todos los puntos de U. El conjunto $\mathcal{O}(U)$ tiene estructura natural de $\mathbf{k}$-álgebra.

Observación. Existe un morfismo de $\mathbf{k}$-álgebras

$$\Phi_U : A(Z) \to \mathcal{O}(U)$$

definido de la manera natural: $\Phi_U(\overline{f})(P) = f(P)$ para todo $P \in U$. El morfismo Φ_U es inyectivo (ejercicio).

Nota. Si $\phi \in \mathcal{O}(Z)$ entonces existe, para cada P en Z un par de polinomios (f_P, g_P) tales que:

- $P \in D_Z(g_P) \subset Z$.
- $\phi = f_P/g_P$ sobre $D_Z(g_P)$.

Así,

$$Z = \bigcup_{P \in Z} D_Z(g_P),\ \emptyset = Z \bigcap \left(\bigcap_{P \in Z} \mathcal{V}(g_P) \right).$$

Existe, por la noetherianidad de $\mathbf{k}[Y]$, una familia finita de puntos $P_1, \ldots, P_s$ en Z tales que

$$Z = \bigcup_{i=1}^{s} D_Z(g_{P_i})$$

y entonces $\phi = f_{P_i}/g_{P_i}$ sobre $D_Z(g_{P_i})$.

Proposición. Sea Z un c.a.a. no vacío (en $\mathbf{k}^m$). Sea $\phi \in \mathcal{O}(Z)$. Entonces existe $f \in \mathbf{k}[Y]$ tal que $\phi = f$.

Nota. El resultado anterior admite una generalización. Sea un abierto U no vacío de Z. Si $\phi \in \mathcal{O}(U)$ entonces existe, para cada P en U un par de polinomios (f_P, g_P) tales que:

- $P \in D_Z(g_P) \subset U$.

- $\phi = f_P/g_P$ sobre $D_Z(g_P)$.

Así,

$$U = \bigcup_{P\in U} D_Z(g_P),\ Z\setminus U = Z\setminus \bigcup_{P\in U} D_Z(g_P) = Z\bigcap\left(\bigcap_{P\in U}\mathcal{V}(g_P)\right).$$

Existe, por la noetherianidad de $\mathbf{k}[Y]$, una familia finita de puntos $P_1,\dots,P_s$ en U tales que

$$U = \bigcup_{i=1}^{s} D_Z(g_{P_i})$$

y entonces $\phi = f_{P_i}/g_{P_i}$ sobre $D_Z(g_{P_i})$.

Proposición. Sea Z un c.a.a. no vacío (en $\mathbf{k}^m$) y sea $\overline{g}\in A(Z)$, $\overline{g}\neq 0$. Notemos $U = D_Z(g)$. Sea $\phi\in\mathcal{O}(U)$. Entonces existe $(f,l)\in\mathbf{k}[Y]\times\mathbf{N}$ tal que $\phi = f/g^l$.

3.2.- Funciones racionales sobre variedades afines.

Sea $Z\subset\mathbf{k}^n$ un conjunto algebraico afín (irreducible). Denotamos $K(Z)$ el cuerpo de cocientes del dominio de integridad $A(Z)$. Sea $\xi\in K(Z)$ y sea $P\in Z$. Diremos que el elemento ξ está definido en P si existen $f,g\in\mathbf{k}[X]=\mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ tales que $\xi = \overline{f}/\overline{g}$ y $g(P)\neq 0$. En este caso se define el valor de ξ en P (y se denota $\xi(P)$) como el elemento $f(P)/g(P)\in\mathbf{k}$. Si $\xi = \overline{f_1}/\overline{g_1}$ y $g_1(P)\neq 0$ entonces $\overline{f}\overline{g_1} = \overline{f_1}\overline{g}$ y por tanto el valor de ξ en P está bien definido. Por esta razón los elementos de $K(Z)$ pueden ser interpretados como "funciones" definidas en un abierto de Z. Así, llamaremos *funciones racionales* sobre Z a los elementos de $K(Z)$.

Lema. El conjunto $B_P(Z)$ de las funciones racionales definidas en el punto $P\in Z$ es un anillo local. De hecho, $B_P(Z)$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{O}_P(Z)$, el anillo local de Z en P.

3.3.- Morfismos de variedades afines.

Sean $V\subset\mathbf{k}^n$ y $W\subset\mathbf{k}^m$ dos conjuntos algebraicos afines. Notaremos $\mathbf{k}[X]=\mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ y $\mathbf{k}[Y]=\mathbf{k}[Y_1,\dots,Y_m]$.

Definición. Una aplicación $\varphi: V\longrightarrow W$ se dice una aplicación polinomial (o un morfismo de c.a.; o morfismo a secas) cuando existe una m-upla de polinomios $(F_1(X),\dots,F_m(X))$ tal que $\varphi(P) = (F_1(P),\dots,F_m(P))$ para todo $P\in V$.

Un morfismo biyectivo cuya inversa sea un morfismo se dirá isomorfismo[1].

Notación. Denotaremos por $AP(V,W)$ (o por $Mor(V,W)$) al conjunto de morfismos de V en W.

Teorema. Sean V,W dos c.a.a. Entonces existe una aplicación natural y biyectiva

$$\Theta: AP(V,W)\longrightarrow Mor_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}(W),\mathcal{O}(V)),$$

donde $Mor_{\mathbf{k}}(\cdot,\cdot)$ denota los homomorfismos de $\mathbf{k}$-álgebras.

Corolario. Se tienen además los siguientes resultados:

[1] Atención: No basta con ser biyectiva y morfismo de variedades.

- Λ lleva isomorfismos de variedades en isomorfismos de $\mathbf{k}$-álgebras (llevando la identidad de V en la identidad de $A(V)$ (si $V = W$)).

- V y W son isomorfos si y sólo si lo son $A(W)$ y $A(V)$ como $\mathbf{k}$-álgebras.

3.4.- Explosiones.

Consideremos el conjunto $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1$. En este espacio sea

$$X = \left\{ ((x,y),(u:v)) \text{ t.q. } \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

X no es vacío porque $((0,0),Q) \in X$ para cualquier $Q \in \mathbf{P}_1$.

Consideremos así mismo la proyección

$$\begin{array}{rcl} \Pi : \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1 & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 \\ (P,Q) & \longmapsto & P \end{array}$$

y notaremos $\Pi|_X = \varphi$.

Observación. Dado $P \in \mathbf{A}^2$, $P \neq (0,0)$, se tiene que $\varphi^{-1}(P)$ consta de un solo elemento, a saber

$$\varphi^{-1}(P) = \{(P,[P])\},$$

donde $[P]$ es el punto proyectivo definido por las coordenadas afines de P.

Definición. La aplicación $\Pi|_X$ se denomina explosión de $\mathbf{A}^2$ con centro el origen, X se denomina el explotado de $\mathbf{A}^2$ y es frecuente llamar a $D = \{(0,0) \times \mathbf{P}_1\}$ el divisor excepcional de la explosión Π.

Recubrimos $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1$ con dos cartas afines, ambas isomorfas a $\mathbf{A}^3$,

$$\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1 = \left(\mathbf{A}^2 \times U_1\right) \cup \left(\mathbf{A}^2 \times U_2\right),$$

donde las ternas de coordenadas serán, respectivamente (x,y,v), provenientes de $((x,y),(1:v))$, y (x,y,u) provenientes de $((x,y),(u:1))$. Como X viene definido por la ecuación $xv = yu$, en la primera carta tendremos $X_1 = X \cap (\mathbf{A}^2 \times U_1) = \mathcal{V}(xv = y)$ y en la segunda $X_2 = \mathcal{V}(x = yu)$.

X_i es un cerrado irreducible (de hecho, una cuádrica irreducible) en $\mathbf{A}^2 \times U_i \simeq \mathbf{A}^3$, pero además

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 : \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & X_1 \\ (x,v) & \longmapsto & (x,xv,v) \end{array}$$

es un morfismo de variedades que es claramente un isomorfismo por lo que $X_1 \simeq \mathbf{A}^2$ y, desde luego $X_2 \simeq \mathbf{A}^2$ de forma análoga. De esta forma podemos "ver" X como la "unión" de dos planos (no disjuntos) X_1 y X_2, donde

$$X_1 \cap X_2 = \{(x,y,v) \in X_1 \mid v \in \mathbf{k}^*\},$$

y análogamente para identificar los puntos de intersección en X_2.

Por último, denotaremos en lo que sigue

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 : \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 \\ (x,v) & \longmapsto & (x,xv) \end{array}$$

que es un morfismo que verifica $\psi_1 = \varphi|_{X_1}\xi_1$.

Vamos a estudiar a continuación la explosión de una curva plana.

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbf{A}^2$ una curva irreducible, $(0,0) \in \mathcal{C}$ y $f = 0$ una de sus ecuaciones irreducibles. Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}_1 \\ {\scriptstyle\varphi}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle\Pi} \\ & \mathbf{A}^2 & \end{array}$$

Consideremos $f = \sum f_j$ como suma de formas; f_j homogénea de grado j y supongamos que f_m es la forma de menor grado no nula y f_n la de mayor grado. Queremos estudiar el conjunto

$$\tilde{C} = \overline{\varphi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\})} \subset X.$$

Lema. Consideremos $\varphi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}) \cap X_1$. Identificando X_1 con $\mathbf{A}^2$, los puntos (x_0, v_0) del conjunto anterior son los que tienen $x_0 \neq 0$ y, además, verifican el polinomio

$$f^{(1)}(x,v) = \sum_{j=m}^{n} x^{j-m} f_j(1,v).$$

Este polinomio es irreducible. Notaremos $\mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{V}(f^{(1)}) \subset \mathbf{A}^2$. Análogamente se define $f^{(2)}$ y $\mathcal{C}^{(2)}$.

Observación. Supongamos que la recta $X = 0$ no es tangente a $\mathcal{C}$ en el $(0,0)$. Entonces podemos suponer que las tangentes son todas de la forma

$$Y = \lambda_i X, \text{ con } i = 1, ..., s;\ \lambda_i \in \mathbf{k},$$

o, lo que es igual, salvo constante no nula,

$$f_m = \prod_{i=1}^{s} (Y - \lambda_i X)^{e_i},\ \sum e_i = m,\ e_i > 0.$$

Proposición. En la situación anterior se tienen los siguientes resultados:

(a) $\mathcal{C}^{(1)} \cap \psi^{-1}(0,0) = \{(0,\lambda_i) \mid i = 1, ..., s\}$.

(b) $\mathrm{mult}_{(0,\lambda_i)}(C^{(1)}) \leq e_i$.

(c) En particular, si $(0,0)$ tiene m tangentes distintas en $\mathcal{C}$ (lo que se denomina habitualmente punto múltiple ordinario), los puntos $(0,\lambda_i) \in \mathcal{C}^{(1)}$ son lisos.

3.5.- Funciones regulares sobre variedades proyectivas

Sea V un conjunto algebraico proyectivo (c.a.p.) (no vacío) de $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(\mathbf{k})$. Si $F \in \mathbf{k}[X] = \mathbf{k}[X_0, X_1, \ldots, X_m]$ es homogéneo, se denota por $D_V(F)$ el conjunto

$$\{P \in V \mid F(P) \neq 0\}.$$

Se denota $S^h(V)$ el anillo cociente $\mathbf{k}[X_0, X_1, \ldots, X_n]/I^h(V)$ donde $I^h(V)$ es el ideal de V. Recordemos que $S^h(V)$ es llamdo el anillo de coordenadas (homogéneas) de V.

El conjunto $D_V(F)$ es abierto en V pues es el complementario (en V) del cerrado $V \cap \mathcal{V}^h(F)$. Es claro que $D_V(F)$ sólo depende de $\overline{F} \in S^h(V)$. Notaremos en algunos casos $D_V(\overline{F})$ en lugar de $D_V(F)$.

Definición Sea $U \subset V$ un abierto no vacío de V. Una aplicación $\phi : U \to \mathbf{k}$ se dice regular en un punto P de U si existen $F, G \in \mathbf{k}[X]$, homogéneos y del mismo grado, tales que:

- $P \in D_V(G) \subset U$.

- $\phi = F/G$ sobre $D_V(G)$.

Se denota $\mathcal{O}_V(U)$ el conjunto de las funciones regulares en todos los puntos de U, o bien $\mathcal{O}(U)$ cuando no se presta a confusión. El conjunto $\mathcal{O}(U)$ tiene estructura natural de **k**-álgebra. Existe un morfismo de **k**-álgebras

$$\Phi_U : \mathbf{k} \to \mathcal{O}(U).$$

Nota Si $\phi \in \mathcal{O}(U)$ entonces existe, para cada P en U un par de polinomios (F_P, G_P) (homogéneos del mismo grado) tales que:

- $P \in D_V(G_P) \subset U$

- $\phi = F_P/G_P$ sobre $D_V(G_P)$.

Así, se tiene de manera análoga al caso afín,

$$U = \bigcup_{P \in U} D_V(G_P),\ V \setminus U = V \setminus \bigcup_{P \in U} D_V(G_P) = V \bigcap \left(\bigcap_{P \in U} \mathcal{V}(G_P) \right).$$

Existe, por la noetherianidad de $\mathbf{k}[X]$, una familia finita de puntos $P_1, \ldots, P_s$ en U tales que

$$U = \bigcup_{i=1}^{s} D_V(G_{P_i})$$

y $\phi = (F_{P_i})/(G_{P_i})$ sobre $D_V(G_{P_i})$.

Proposición. Sea V un c.a.p. no vacío (en $\mathbf{P}_n$) y sea $\overline{G} \in S^h(V)$, $\overline{G}$ homogéneo, no constante. Notemos $U = D_V(G)$. Sea $\phi \in \mathcal{O}(U)$. Entonces existe $(F, l) \in \mathbf{k}[X] \times \mathbf{N}$ tal que:

1. F es homogéneo y grado$(F) = l \cdot$ grado(G).

2. $\phi = F/G^l$.

Corolario. Si V es un c.a.p. (no vacío) entonces $\mathcal{O}(V) = \mathbf{k}$.

Proposición. Sea V un c.a.a. (o c.a.p.) no vacío y sea U un abierto propio de V. Si $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, entonces φ es una aplicación continua de U en **k** (ambos espacios con la topología de Zariski).

Observación. En las condiciones anteriores, si U_1 y U_2 son dos abiertos de V, $\varphi_i \in \mathcal{O}(U_i)$, y U es un abierto denso de $U_1 \cap U_2$, se tiene que

$$\varphi_1|_U = \varphi_2|_U \implies \varphi_1|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_2|_{U_1 \cap U_2}.$$