Tema 4.- Transformaciones cuadráticas. Resolución de singularidades de curvas.

En $\mathbf{P}_2$ se consideran los puntos $P_0 = (1:0:0), P_1 = (0:1:0), P_2 = (0:0:1)$ y las rectas $L_{ij} = P_i + P_j$ para $(i,j) = (0,1),(0,2),(1,2)$. Notemos $Z = \{P_0, P_1, P_2\}$ y $T = \cup_{ij} L_{ij}$.

Definición.- La aplicación $\gamma : \mathbf{P}_2 \setminus Z \to \mathbf{P}_2$ definida por $\gamma(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ se llama la transformación cuadrática de $\mathbf{P}_2$ (relativa a $\{P_0, P_1, P_2\}$).

Sea $U = \mathbf{P}_2 \setminus T$. La imagen de γ es $U \cup Z$. Además, la restricción de γ a U es biyectiva e involutiva. Ya que, sobre U, se tiene

$$\gamma(x_0 : x_1 : x_2) = \left(\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}\right).$$

Sea $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio homogéneo de grado d. Se denota por $F^\gamma = F^\gamma(x_0, x_1, x_2)$ al polinomio $F^\gamma = F(x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1)$. El polinomio F^γ es homogéneo de grado $2d$. A la curva definida por F^γ se le llama la transformada total de la curva definida por F (respecto de γ). $\mathcal{V}(F^\gamma)$ es la clausura de Zariski de $\gamma^{-1}(\mathcal{V}(F))$.

Lema.- Si $\mathrm{mult}_{P_i}(F) = r_i$ entonces $x_i^{r_i}$ es la máxima potencia de x_i que divide a F^γ, para $i = 0,1,2$.

Se denota por F' el polinomio

$$F'(x_0, x_1, x_2) = \frac{F^\gamma}{x_0^{r_0} x_1^{r_1} x_2^{x_2}}.$$

A la curva definida por F' se le llama la transformada estricta de la curva definida por F (respecto de γ).

Lema.- Se tiene:
a) El grado de F' es $2d - r_0 - r_1 - r_2$.
b) $\mathrm{mult}_{P_0}(F') = d - r_1 - r_2$ (y análogamente para P_1 y P_2).
c) $(F')' = F$ y si F es irreducible también lo es F'.

En adelante nos restringiremos al caso F irreducible (aunque muchos de los resultados que enunciaremos son válidos para F reducida).

Si ninguna de las rectas excepcionales (i.e. ninguna de las L_{ij}) es tangente a F en ninguno de los puntos fundamentales (i.e. los puntos P_i) diremos que C está en buena posición (respecto de $\{P_0, P_1, P_2\}$). Por ejemplo ninguna de las cónicas del haz $F_\lambda = x_0^2 + \lambda x_1 x_2$ está en buena posición. Observamos que $F_\lambda^\gamma = (x_1x_2)^2 + \lambda x_0x_2x_0x_1 = x_1x_2(x_1x_2 + \lambda x_0^2)$. Así, $(F_\lambda)'$ tampoco está en buena posición. Sin embargo se tiene:

Lema.- Si F está en buena posición también lo está F'.

Sea $C = \mathcal{V}(F), C' = \mathcal{V}(F')$. Sea L la recta $x_2 = 0$ y $Q = P_2 = (0:0:1)$. Supongamos que $(C' \cap L) \setminus \{P_0, P_1\} = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$.

Lema.- Si, con las notaciones anteriores, C está en buena posición entonces:
a) $\mathrm{mult}_{Q_i}(C') \leq i_{Q_i}(C', L)$.
b) $\sum_{i=1}^s i_{Q_i}(C', L) = r_2$. En particular, si $r_2 = 0$ (es decir, si $P_2 \notin C$), entonces $C' \cap L \subset \{P_0, P_1\}$.

Mediante γ los puntos singulares de $C' \cap U$ corresponden a puntos singulares de $C \cap U$, con la misma multiplicidad. Además, puntos múltiples ordinarios se transforman en puntos múltiples ordinarios.

Observación.- Sea C una curva irreducible, sea $P \in C \cap U$ y sea $Q = \gamma(P)$. Se tiene que:
a) Los anillos locales $\mathcal{O}_P(C)$ y $\mathcal{O}_Q(C')$ son isomorfos.
b) $\mathrm{mult}_P(C) = \mathrm{mult}_Q(C')$.

c) P es un punto múltiple ordinario de C si y sólo si Q lo es de C'. Para esta última parte, se utiliza (ejercicio) que, si $r = \mathrm{mult}_P(C)$, entonces P es un punto múltiple ordinario de C si y sólo si existen $g_1, \ldots, g_r$ elementos en $\mathfrak{m}_P(C)$ tales que:
1) $\overline{g_i} \neq \lambda \overline{g_j}$, para $i \neq j$ (clases módulo $\mathfrak{m}_P(C)^2$).
2) $\dim(\mathcal{O}_P(C)/(g_i)) > r$, para todo i.

Definición.- Diremos que C (de grado d) está en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0) si:
a) C está en buena posición (respecto de $\{P_0, P_1, P_2\}$).
b) C corta a L_2 en d puntos distintos y no fundamentales.
c) Aparte de en P_2, C corta a L_0 (resp. L_1) en $d - r_2$ puntos distintos no fundamentales (donde r_2 sigue siendo $\mathrm{mult}_{P_2}(C)$.

Lema.- Sea C irreducible, en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0). Entonces los puntos P_0, P_1, P_2 son puntos múltiples ordinarios de C' de multiplicidades respectivas $d - r_2, d - r_2, d$.

Lema.- Se tiene $C' \cap L_0 \subset \{P_1, P_2\}$ y $C' \cap L_1 \subset \{P_0, P_2\}$.

Sea C una curva plana proyectiva irreducible de grado d. Notemos, para cada $P \in \mathbf{P}_2(\mathbf{k})$, $r_P = \mathrm{mult}_P(C)$.

Proposición.- El número entero

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_P \frac{r_P(r_P - 1)}{2}$$

es no negativo. Se denota por $g^*(C)$.

Lema.- Si C está en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0) entonces

$$g^*(C') = g^*(C) - \sum_{i=1}^{s} \frac{t_i(t_i - 1)}{2}$$

donde $t_i = \mathrm{mult}_{Q_i}(C')$ y los Q_i son los puntos no fundamentales de $C' \cap L_2$.

Sea $\phi : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ una homografía. Sea $C = [F]$ una curva de $\mathbf{P}_2$. Notaremos C^ϕ (y llamaremos transformada de C mediante ϕ) a la curva definida por

$$F^\phi = F^\phi(x_0, x_1, x_2) = F(\phi(x_0, x_1, x_2)).$$

Esta denominación es muy ambigua (e incluso contradictoria) pues $C^\phi = \phi^{-1}(\mathcal{V}(F))$. La mantendremos, a pesar de todo, pues es la denomicación clásica.

Proposición.- Sea k de característica nula.[1] Sea $C = [F]$ irreducible y sea P un punto de C. Existe una homografía ϕ de $\mathbf{P}_2$ tal que $\phi((0:0:1)) = P$ y tal que F^ϕ está en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0).

Cada aplicación $\phi \circ \gamma$ (con ϕ homografía) se denomina transformación cuadrática general (o simplemente transformación cuadrática, si no hay riesgo de confusión).

Sea P un punto de $C = [F]$. Si F^ϕ está en excelente posición y si $\phi(0:0:1) = P$ diremos que $\phi \circ \gamma$ está centrada en P.

Teorema.- Sea C una curva plana proyectiva irreducible. Mediante una familia finita de transformaciones cuadráticas (aplicadas a C) se puede obtener una curva plana cuyos únicos puntos singulares sean puntos múltiples ordinarios.

[1]Esta condición es necesaria (ejercicio).