Tema 5.- Divisores sobre una curva.

5.1.- Preliminares.

Trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado. Recordemos que una *curva* es una variedad[1] X tal que el grado de trascendencia de $K(X)$ sobre $\mathbf{k}$ es 1.

Recordemos también que una variedad Y se dice proyectiva (resp. afín) si es isomorfa a un cerrado irreducible de un espacio proyectivo (resp. afín). Así, se dice que una curva X es proyectiva (resp. afín) si es isomorfa a un cerrado irreducible de un espacio proyectivo (resp. afín).

5.2.- Divisores.

Definición.- Sea X una curva. Un divisor en X es una suma formal $\sum_{P\in X} n_P P$ donde $n_P \in \mathbf{Z}$ y $n_P = 0$ para casi todo P.

Denotaremos $Div(X)$ el conjunto de los divisores sobre (o en) X.

El divisor $D = \sum_P n_P P$ se dice efectivo si cada n_P es mayor o igual que cero (en ese caso se denota $D \succeq 0$).

El soporte de $D = \sum_P n_P P$ es el conjunto $\text{sop}(D) = \{P \in X \mid n_P \neq 0\}$.

El grado de D es $\text{grado}(D) = \sum_P n_P$.

Lema.- $Div(X)$ es el $\mathbf{Z}$-módulo libre de base X.

Definición.- Se dice que $D = \sum n_P P$ es mayor o igual que $D' = \sum n'_P P$ si $D - D' = \sum (n_P - n'_P)P$ es efectivo (en este caso se denota $D \succeq D'$ o también $D' \preceq D$).

Lema.- La aplicación grado : $Div(X) \to \mathbf{Z}$ es un homomorfismo (de $\mathbf{Z}$-módulos) sobreyectivo.

Ejemplo.- Sea $X = \mathbf{P}_1$. Sea $\xi \in K(X)$. Sabemos que

$$\xi = \frac{F}{G}, F, G \text{ homogéneos de } \mathbf{k}[x_0, x_1]) \text{ del mismo grado.}$$

Podemos suponer que F y G no tienen factores comunes. Como el cuerpo $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado, podemos escribir

$$F(x_0, x_1) = x_0^a x_1^b \prod_i (x_0 - \alpha_i x_1)^{a_i}, \quad G(x_0, x_1) = x_0^c x_1^d \prod_i (x_0 - \beta_i x_1)^{b_i},$$

donde a, b, c, d, a_i, b_j son enteros no negativos, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{k}$ y $\alpha_i \neq \beta_j$ para todo (i, j). Como hemos supuesto F y G sin factores comunes entonces $ac = 0$ y $bd = 0$. A ξ le asociamos el divisor (que denotaremos $\text{div}(\xi)$)

$$(a - c)(0 : 1) + (b - d)(1 : 0) + \sum_i a_i(\alpha_i : 1) - \sum_j b_j(\beta_j : 1).$$

[1]Es decir, un abierto de un cerrado irreducible de un espacio mixto (ver tema 3).

5.3.- Interludio: Aplicaciones racionales. Complementos al proceso de resolución de singularidades.

Nota.- Recordemos las siguientes definiciones clásicas: sean X e Y dos variedades y sean U_1, U_2 dos abiertos (no vacíos) de X.

Dos morfismos de variedades $\phi_i : U_i \to Y$, $i = 1, 2$, se dicen equivalentes si ambos coinciden en $U_1 \cap U_2$. En ese caso se denotará $(U_1, \phi_1) \sim (U_2, \phi_2)$.

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los pares (U, ϕ) donde U es un abierto no vacío de X y $\phi : U \to Y$ un morfismo de variedades. La relación definida anteriormente en $\mathcal{P}$ es de equivalencia y cada clase $[(U, \phi)]$ de $\mathcal{P}/\sim$ se llamará una aplicación racional de X en Y .

Observación.- Todo morfismo $\phi : X \to Y$ define una aplicación racional de X en Y (basta considerar la clase definida por (X, ϕ)).

Si $Y = \mathbf{A}^1$ es la recta afín (sobre el cuerpo $\mathbf{k}$) entonces los conceptos de aplicación racional de X en Y y de función racional sobre X coinciden.

Definición.- El dominio de definición de una aplicación racional $[(U, \phi)]$ es la reunión de los abiertos V tales que existe un morfismo $\psi : V \to Y$ con $(V, \psi) \sim (U, \phi)$.

Una aplicación racional Φ=$[(U, \phi)]$ se dice dominante si $\phi(U)$ es denso en Y. En ese caso, si $(V, \psi) \sim (U, \phi)$ entonces $\psi(V)$ en también denso en Y.

Observación.- Si U y V son abiertos afines de X e Y respectivamente y si $\phi : U \to V$ es un morfismo representante de la aplicación racional dominante Φ entonces el morfismo inducido

$$\widetilde{\phi} : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$$

es inyectivo y se extiende por tanto a un homomorfismo inyectivo de cuerpos

$$\widetilde{\phi} : K(V) = K(Y) \longrightarrow K(U) = K(X).$$

Este morfismo se representará por $\widetilde{\Phi}$, puesto que no depende de la elección de ϕ.

Sea C una curva plana irreducible proyectiva y sea $f : X \longrightarrow C$ su modelo no singular (i.e. X es una curva proyectiva no singular y f es un morfismo birracional sobreyectivo). Podemos identificar $K(X)$ con $K(C)$, mediante el isomorfismo de cuerpos $\widetilde{f} : K(C) \longrightarrow K(X)$.

Teorema.- La correspondencia que a cada $Q \in X$ asocia $\mathcal{O}_Q(X)$ es biyectiva sobre el conjunto de los anillos de valoración discreta de $K(X)$. Además, si $P \in C$ y $Q \in X$, se tiene que $\mathcal{O}_Q(X)$ domina[2] a $\mathcal{O}_P(C)$ si y sólo si $f(Q) = P$.

Proposición.- (Complementos al proceso de resolución de singularidades). Sea $P \in C$. Existe un entorno abierto afín (de P) $W \subset C$ tal que:

a) $W' = f^{-1}(W)$ es un abierto afín en X.

b) $\mathcal{O}(W')$ es un $\mathcal{O}(W)$–módulo finitamente generado y existe $\xi \in \mathcal{O}(W)$, no nulo, tal que $\xi\mathcal{O}(W') \subset \mathcal{O}(W)$.

c) El $\mathbf{k}$–espacio vectorial $\mathcal{O}(W')/\mathcal{O}(W)$ es de dimensión finita.

[2]Si $A \subset B$ son dos anillos locales, se dice que B domina a A si el ideal maximal de A está contenido en el ideal maximal de B.

5.4.- El divisor de una forma.

Con las notaciones anteriores, sea $Q \in X$ y sea $P = f(Q) \in C$. Sea $G \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio homogéneo de grado m (no necesariamente irreducible) de manera que C no sea una componente irreducible de la curva definida por G. El anillo local $\mathcal{O}_P(C)$ es un cociente del anillo local $\mathcal{O}_P(\mathbf{P}_2)$.

Sea L una recta de $\mathbf{P}_2$ que no pase por P. El cociente G/L^m es un elemento de $\mathcal{O}_P(\mathbf{P}_2)$. Sea g su clase en $\mathcal{O}_P(C) \subset K(C)$. Identificaremos de forma habitual $\mathcal{O}_P(C)$ con el subanillo $\widetilde{f}(\mathcal{O}_P(C)) \subset \mathcal{O}_Q(X)$.
Se define $\mathrm{ord}_Q(G) = \mathrm{ord}_Q(g)$.

Definición.- Se llama divisor de G (en X) al divisor $\mathrm{div}(G) = \sum_{Q \in X} \mathrm{ord}_Q(G) Q$.

Proposición.- Sea C una curva plana proyectiva irreducible y sea $P \in C$. Sea $G \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ homogéneo, no constante, y tal que C no es una componente de la curva definida por G. Entonces

$$i_P(C, G) = \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \mathrm{ord}_Q(G).$$

Lema.- Supongamos ahora C de grado n y G de grado m. Entonces el divisor (sobre X), $\mathrm{div}(G)$ tiene grado nm.

Recordemos que, dado que X es lisa, todo punto $Q \in X$ define una valoración en $K(X)$ que denotamos ord_Q. Sea $\xi \in K(X)$. Definimos el divisor de ξ, como

$$\mathrm{div}(\xi) = \sum_{Q \in X} \mathrm{ord}_Q(\xi) Q.$$

El conjunto de ceros de ξ es el conjunto $\{Q \in X \,|\, \mathrm{ord}_Q(\xi) > 0\}$ y el conjunto de polos de ξ es el conjunto $\{Q \in X \,|\, \mathrm{ord}_Q(\xi) < 0\}$. Ambos conjuntos son subconjuntos algebraicos de X.

Definición.- Sea D un divisor en X. Se define $\mathcal{L}(D)$ como el conjunto

$$\mathcal{L}(D) = \{\xi \in K(X) \,|\, \mathrm{div}(\xi) + D \succeq 0\} \cup \{0\}.$$

$\mathcal{L}(D)$ es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial y denotaremos por $d(D)$ la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{L}(D)$.

Proposición.- Se verifican:

1. Si $D \prec D'$ entonces $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$. Además
$$\dim_{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathcal{L}(D')}{\mathcal{L}(D)} \right) \leq \mathrm{grado}(D' - D).$$
2. $\mathcal{L}(0) = \mathbf{k}$. Si $\mathrm{grado}(D) < 0$ entonces $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.
3. Si $\mathrm{grado}(D) \geq 0$ entonces $d(D) \leq \mathrm{grado}(D) + 1$.
4. Si D es linealmente equivalente a D' entonces $d(D) = d(D')$.

Proposición.- Si $D \prec D'$ entonces $d(D') \leq d(D) + \mathrm{grado}(D' - D)$.

Definición.- Sea $D = \sum_P n_P P$ un divisor en X y sea S un subconjunto de X. Se define $\mathcal{L}_S(D)$ como el conjunto

$$\mathcal{L}_S(D) = \{\xi \in K(X) \,|\, \mathrm{ord}_P(\xi) + n_P \geq 0, \text{ para todo } P \in S\} \cup \{0\}.$$

$\mathcal{L}_S(D)$ es un **k**-espacio vectorial.

Proposición.- Sea $S \subset X$ y sean D, D' divisores de X tales que $D \prec D'$. Entonces $\mathcal{L}_S(D) \subset \mathcal{L}_S(D')$. Además, si S es finito,

$$\dim_{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathcal{L}_S(D')}{\mathcal{L}_S(D)} \right) = \mathrm{grado}_S(D' - D).$$

Proposición.- Sea $\xi \in K(X) \setminus \mathbf{k}$ y sea $D = \mathrm{div}(\xi)_0$. Notemos $d = \dim_{\mathbf{k}(\xi)} K(X)$. Entonces,

1. $\mathrm{grado}(D) = d$.
2. Existe una constante $\alpha \in \mathbf{Z}$ tal que $\dim_{\mathbf{k}}(rD) \geq rd - \alpha$, para todo $r \in \mathbf{N}$.

Se recuerda que una variedad Z se dice racional si es birracionalmente equivalente a $\mathbf{P}_n$ para algún n.

Corolario.- Sean C una curva plana proyectiva y sea X su modelo no singular. Son equivalentes:

1. C es racional.
2. X es isomorfo a $\mathbf{P}_1$.
3. Existe $\xi \in K(X)$ tal que $\mathrm{grado}(\mathrm{div}(\xi)_0) = 1$.
4. Existe $P \in X$ tal que $\dim(\mathcal{L}(P)) > 1$.