Nota.- Las notas de este tema son un resumen de los resultados probados en clase (de teoría o de prácticas). Francisco J. Castro Jiménez, José M. Tornero Sánchez han participado en la confección de las mismas. Para su realización hemos consultado la bibliografía citada al final del programa de la asignatura. En particular hemos seguido muy de cerca el libro de W. Fulton "Algebraic Curves", Benjamin, 1969.

Tema 5.- Divisores sobre una curva.

5.1 Preliminares

Trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado. Recordemos que una *curva* es una variedad[1] C tal que el grado de trascendencia de $K(C)$ sobre $\mathbf{k}$ es 1.

Recordemos también que una variedad Y se dice proyectiva (resp. afín) si es isomorfa a un cerrado irreducible de un espacio proyectivo (resp. afín). Así, se dice que una curva C es proyectiva (resp. afín) si es isomorfa a un cerrado irreducible de un espacio proyectivo (resp. afín).

5.2 Divisores

Definición 5.2.1 *Sea X una curva. Un divisor en X es una suma formal $\sum_{P\in X} n_P P$ donde $n_P \in \mathbf{Z}$ y $n_P = 0$ para casi todo P. Denotaremos $Div(X)$ el conjunto de los divisores sobre (o en) X. El divisor $D = \sum_P n_P P$ se dice efectivo si cada n_P es mayor o igual que cero (en ese caso se denota $D \succeq 0$). El soporte de $D = \sum_P n_P P$ es el conjunto $\mathrm{sop}(D) = \{P \in X \mid n_P \neq 0\}$ y el grado de D es $\mathrm{grado}(D) = \sum_P n_P$.*

Lema 5.2.2 *$Div(X)$ es el $\mathbf{Z}$-módulo libre de base X.*

Definición 5.2.3 *Se dice que $D = \sum n_P P$ es mayor o igual que $D' = \sum n'_P P$ si $D - D' = \sum (n_P - n'_P)P$ es efectivo (en este caso se denota $D \succeq D'$ o también $D' \preceq D$).*

Lema 5.2.4 *La aplicación $\mathrm{grado} : Div(X) \to \mathbf{Z}$ es un homomorfismo (de $\mathbf{Z}$-módulos) sobreyectivo.*

Ejemplo 5.2.5 *Sea $X = \mathbf{P}_1$. Sea $\xi \in K(X)$. Sabemos que $\xi = \frac{F}{G}$ donde F, G son polinomios homogéneos (de $\mathbf{k}[x_0, x_1]$) del mismo grado (digamos n). Podemos suponer que F y G no tienen factores comunes. Como el cuerpo $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado, podemos escribir $F(x_0, x_1) = x_0^a x_1^b \prod_i (x_0 - \alpha_i x_1)^{a_i}$ y análogamente $G(x_0, x_1) = x_0^c x_1^d \prod_i (x_0 - \beta_i x_1)^{b_i}$ donde a, b, c, d, a_i, b_j son enteros no negativos, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{k}$ y $\alpha_i \neq \beta_j$ para todo (i, j). Como hemos supuesto F y G sin factores comunes entonces $ac = 0$ y $bd = 0$. A ξ le asociamos el divisor (que denotaremos $\mathrm{div}(\xi)$)*

$$(a - c)(0 : 1) + (b - d)(1 : 0) + \sum_i a_i(\alpha_i : 1) - \sum_j b_j(\beta_j : 1).$$

Sean X e Y dos variedades y sean U_1, U_2 dos abiertos (no vacíos) de X. Dos morfismos de variedades $\phi_i : U_i \to Y$, $i = 1, 2$, se dicen equivalentes si ambos coinciden en $U_1 \cap U_2$. En ese caso se denotará $(U_1, \phi_1) \sim (U_2, \phi_2)$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los pares (U, ϕ) donde U es un abierto no vacío de X y $\phi : U \to Y$ un morfismo de variedades. La relación definida anteriormente en $\mathcal{P}$ es de equivalencia. Cada clase $[(U, \phi)]$ de $\mathcal{P}/\sim$ se llamará una aplicación racional de X en Y .

Todo morfismo $\phi : X \to Y$ define una aplicación racional de X en Y (basta considerar la clase definida por (X, ϕ)).

Si $Y = \mathbf{A}^1$ es la recta afín (sobre el cuerpo $\mathbf{k}$) entonces los conceptos de aplicación racional de X en Y y de función racional sobre X coinciden.

El dominio de definición de una aplicación racional $[(U, \phi)]$ es la reunión de los abiertos V tales que existe un morfismo $\psi : V \to Y$ con $(V, \psi) \sim (U, \phi)$. Una aplicación racional Φ=$[(U, \phi)]$ se dice dominante si $\phi(U)$ es denso en Y. En ese caso, si $(V, \psi) \sim (U, \phi)$ entonces $\psi(V)$ en también denso en Y. Si U y V son abiertos afines de X e Y respectivamente y si $\phi : U \to V$ es un morfismo representante de la aplicación racional dominante

[1] Es decir, un abierto de un cerrado irreducible de un espacio mixto.

Φ entonces el morfismo inducido $\widetilde{\phi} : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ es inyectivo y se extiende por tanto a un homomorfismo inyectivo de cuerpos $\widetilde{\phi} : K(V) = K(Y) \to K(U) = K(X)$. Este morfismo se representará por $\widetilde{\phi}$.

Sea C una curva plana irreducible proyectiva y sea $f : X \to C$ su modelo no singular (i.e. X es una curva proyectiva no singular y f es un morfismo birracional sobreyectivo). Podemos identificar $K(X)$ con $K(C)$, mediante el isomorfismo de cuerpos $\widetilde{f} : K(C) \to K(X)$.

Teorema 5.2.6 *La correspondencia que a cada $Q \in X$ asocia $\mathcal{O}_Q(X)$ es biyectiva sobre el conjunto de los anillos de valoración discreta de $K(X)$. Además, si $P \in C$ y $Q \in X$, $\mathcal{O}_Q(X)$ domina*[2] *$\mathcal{O}_P(C)$ si y sólo si $f(Q) = P$.*

5.3 El divisor de un polinomio homogéneo

Con las notaciones anteriores, sea $Q \in X$ y sea $P = f(Q) \in C$. Sea $G \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio homogéneo de grado m (no necesariamente irreducible) de manera que C no sea una componente irreducible de la curva definida por G. El anillo local $\mathcal{O}_P(C)$ es un cociente del anillo local $\mathcal{O}_P(\mathbf{P}_2)$. Sea L una recta de $\mathbf{P}_2$ que no pase por P. El cociente G/L^m es un elemento de $\mathcal{O}(\mathbf{P}_2)$. Sea g su clase en $\mathcal{O}_P(C) \subset K(C)$. Identificamos $\mathcal{O}_P(C)$ con el subanillo $\widetilde{f}(\mathcal{O}_P(C)) \subset \mathcal{O}_Q(X)$. Se define $\mathrm{ord}_Q(G)$ como $\mathrm{ord}_Q(g)$.

Definición 5.3.1 *Se llama divisor de G (en X) al divisor* $\mathrm{div}(G) = \sum_{Q \in X} \mathrm{ord}_Q(G)Q$.

Proposición 5.3.2 *Sea C una curva plana proyectiva irreducible y sea $P \in C$. Sea $G \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ homogéneo, no constante, y tal que C no es una componente de la curva definida por G. Entonces $i_P(C, G) = \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \mathrm{ord}_Q(G)$.*

Lema 5.3.3 *Supongamos ahora C de grado n y G de grado m. Entonces el divisor (sobre X),* $\mathrm{div}(G)$ *tiene grado nm.*

Demostración. En efecto, $\sum_{Q \in X} \mathrm{ord}_Q(G) = \sum_{P \in C, Q \in f^{-1}(P)} i_P(C, G) = nm$ (por el teorema de Bezout). $\square$

Sea $\xi \in K(X)$. Definimos el divisor de ξ, como $\mathrm{div}(\xi) = \sum_{Q \in X} \mathrm{ord}_Q(\xi)Q$. El conjunto de ceros de ξ es el conjunto $\{Q \in X \,|\, \mathrm{ord}_Q(\xi) > 0\}$ y el conjunto de polos de ξ es el conjunto $\{Q \in X \,|\, \mathrm{ord}_Q(\xi) < 0\}$. Ambos conjuntos son subconjuntos algebraicos de X. Escribiremos (y llamaremos divisor de ceros de ξ a) $\mathrm{div}(\xi)_0 = \sum_{Q, \mathrm{ord}_Q(\xi) > 0} \mathrm{ord}_Q(\xi)Q$ y escribiremos (y llamaremos divisor de polos de ξ a) $\mathrm{div}(\xi)_\infty = \sum_{Q, \mathrm{ord}_Q(\xi) < 0} (-\mathrm{ord}_Q(\xi))Q$.

Definición 5.3.4 *Sea D un divisor en X. Se define $\mathcal{L}(D)$ como el conjunto*

$$\mathcal{L}(D) = \{\xi \in K(X) \,|\, \mathrm{div}(\xi) + D \succeq 0\} \cup \{0\}.$$

$\mathcal{L}(D)$ es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial. Si D es un divisor de X denotaremos por $d(D)$ la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{L}(D)$.

Proposición 5.3.5 *Se verifican:*

1. *Si $D \prec D'$ entonces $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$. Además* $\dim_{\mathbf{k}}(\frac{\mathcal{L}(D')}{\mathcal{L}(D)}) \leq \mathrm{grado}(D' - D)$.

2. $\mathcal{L}(0) = \mathbf{k}$. *Si* $\mathrm{grado}(D) < 0$ *entonces* $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.

3. *Si* $\mathrm{grado}(D) \geq 0$ *entonces* $d(D) \leq \mathrm{grado}(D) + 1$.

[2]Si $A \subset B$ son dos anillos locales, se dice que B domina a A si el ideal maximal de A está contenido en el ideal maximal de B.

4. *Si D es linealmente equivalente a D' entonces $d(D) = d(D')$.*

Proposición 5.3.6 *Si $D \prec D'$ entonces $d(D') \leq d(D) + \mathrm{grado}(D' - D)$.*

Definición 5.3.7 *Sea $D = \sum_P n_P P$ un divisor en X y sea S un subconjunto de X. Se define $\mathcal{L}_S(D)$ como el conjunto*

$$\mathcal{L}_S(D) = \{\xi \in K(X) \,|\, \mathrm{ord}_P(\xi) + n_P \geq 0, \text{ para todo } P \in S\} \cup \{0\}.$$

$\mathcal{L}_S(D)$ es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial.

Proposición 5.3.8 *Sea $S \subset X$ y sean D, D' divisores de X tales que $D \prec D'$. Entonces $\mathcal{L}_S(D) \subset \mathcal{L}_S(D')$. Además, si S es finito, $\dim_{\mathbf{k}}(\frac{\mathcal{L}_S(D')}{\mathcal{L}_S(D)}) = \mathrm{grado}_S(D' - D)$.*

Proposición 5.3.9 *Sea $\xi \in K(X) \setminus \mathbf{k}$ y sea $D = div(\xi)_0$. Notemos $d = \dim_{\mathbf{k}(\xi)} K(X)$. Entonces,*

1. $\mathrm{grado}(D) = d$.
2. *Existe una constante $\alpha \in \mathbf{Z}$ tal que $\dim_{\mathbf{k}}(rD) \geq rd - \alpha$, para todo $r \in \mathbf{N}$.*

Se recuerda que una variedad Z se dice racional si es birracionalmente equivalente a $\mathbf{P}_n$ para algún n.

Corolario 5.3.10 *Sean C una curva plana proyectiva y sea X su modelo no singular. Son equivalentes:*

1. *C es racional.*
2. *X es isomorfo a $\mathbf{P}_1$.*
3. *Existe $\xi \in K(X)$ tal que $\mathrm{grado}(div(\xi)_0) = 1$.*
4. *Existe $P \in X$ tal que $\dim(\mathcal{L}(P)) > 1$.*