Tema 6.- Teorema de Riemann.

Sea C una curva plana proyectiva y sea X el modelo no singular.

Teorema de Riemann.- Existe $g \in \mathbf{N}$ tal que, para todo divisor D en X, se tiene

$$d(D) \geq \text{grado}(D) + 1 - g.$$

Dada la curva plana proyectiva C (y su modelo no singular X) al menor entero g verificando el teorema de Riemann se le llama el género de C (o de X o de $K(X) = K(C)$).

Corolario.- En las condiciones anteriores, se tiene:

1) Sea D un divisor tal que $d(D) = \text{grado}(D) + 1 - g$. Si E es un divisor tal que $E \succeq D$ entonces $d(E) = \text{grado}(E) + 1 - g$.

2) Sea $\xi \in K(X) \setminus \mathbf{k}$. Entonces se tiene $g = \text{grado}(r\text{div}(\xi)_0) + 1 - d(r\text{div}(\xi)_0)$ para $r \gg 0$.

3) Existe un entero $n(C)$ tal que, para todo divisor E de grado mayor o igual que $n(C)$, se tiene $d(E) = \text{grado}(E) + 1 - g$.

4) Una curva C es racional si y sólo si tiene género 0.

Proposición.- Sea C una curva plana proyectiva de grado n, con sólo puntos múltiples ordinarios como singularidades. El género g de C es igual a

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{m_P(C)(m_P(C)-1)}{2}.$$

En las condiciones anteriores, una curva definida por un polinomio homogéneo G se dice adjunta de C si $\text{div}(G) \succeq E_X$, donde

$$E_X = \sum_{Q \in X, f(Q)=P} (r_P - 1)Q.$$

Observación.- G es adjunta de C si y sólo si $m_P(G) \geq m_P(C) - 1$, para todo punto P de C. Más precisamente, sea $P \in C$;

$$m_P(G) \geq m_P(C) - 1$$

si y sólo si tenemos que

$$\text{ord}_Q(G) \geq m_P(C) - 1, \text{ para todo } Q \in f^{-1}(P).$$

Corolario.- Sea C una curva plana proyectiva irreducible de grado n.

1) Se verifica:

$$g \leq g*(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{r_P(r_P - 1)}{2}.$$

2) Si tenemos que

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \sum_{P \in C} \frac{r_P(r_P - 1)}{2}$$

entonces C es racional.

El Teorema del Residuo
Álgebra IV. Curso 1.999-2.000

El Teorema del Residuo es un resultado clásico de la teoría de curvas planas y necesita de varios lemas auxiliares, en particular un teorema de Max Noether. De las diversas demostraciones posibles, hemos optado por la del libro de W. Fulton[1], por adecuarse mejor a nuestra nomenclatura.

1. Adjuntas de una curva.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva plana que sólo posea puntos múltiples ordinarios, $f : X \longrightarrow \mathcal{C}$ la resolución canónica de singularidades. Para cada $Q \in X$, con $f(Q) = P$, definimos el número entero

$$r_Q = \text{mult}_P(\mathcal{C}) = r_P,$$

y el divisor sobre X

$$E = \sum_{Q \in X} (r_Q - 1) \cdot Q.$$

De manera elemental, E es un divisor efectivo de grado $\sum r_P(r_P - 1)$, donde la suma se extiende a todos los puntos de $\mathcal{C}$, ya que hay r_P puntos sobre cada $P \in \mathcal{C}$ singular. Toda curva plana Y tal que $\text{div}(Y) \succeq E$ se denomina una adjunta de $\mathcal{C}$. Veamos una caracterización de las curvas adjuntas a una dada.

Lema.– Sea $f : X \longrightarrow \mathcal{C}$ como antes, Y una curva plana proyectiva. Supongamos también que P es uno de los puntos múltiples ordinarios de $\mathcal{C}$ con multiplicidad r y $f^{-1}(P) = \{Q_1, ..., Q_r\}$. Entonces $\text{mult}_P(Y) \geq s$ para un $s \leq r$ si y sólo si $\text{ord}_{Q_i}(Y) \geq s$, para todo $i = 1, ..., r$.

Demostración.– Hecha en teoría. Recordemos los elementos más interesantes de la prueba: en las condiciones del problema, si Y' e $\tilde{Y}$ son las transformadas estricta y total, respectivamente, de Y por la explosión (simultánea, eventualmente) f. Notamos S el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}$ y entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\text{div}(Y) &= \sum_{P \notin S, f(Q)=P} i_P(\mathcal{C}, Y) \cdot Q + \sum_{P \in S, f(Q)=P} \text{ord}_Q(Y) \cdot Q \\
&= \sum_{P \notin S, f(Q)=P} i_P(\mathcal{C}, Y) \cdot Q + \sum_{P \in S, f(Q)=P} i_Q(\tilde{Y}, X) \cdot Q \\
&= \sum_{P \notin S, f(Q)=P} i_P(\mathcal{C}, Y) \cdot Q + \sum_{P \in S, f(Q)=P} [\text{mult}_P(Y) + i_Q(Y', X)] \cdot Q
\end{aligned}$$

Si tenemos entonces, para un cierto $s \leq r$, $\text{mult}_P(Y) \geq s$, es claro que

$$\text{ord}_Q(Y) = \text{mult}_P(Y) + i_Q(Y', X) \geq s, \; \forall Q \in f^{-1}(P).$$

En otro orden de cosas, si $\text{ord}_Q(Y) \geq s$ para todo Q, podemos tener dos casos:

(A) Algún $i_Q(Y', X) = 0$. Entonces tenemos la condición pedida de inmediato.

(B) Todos los $i_Q(Y', X)$ son no nulos. Entonces Y tiene en P al menos todas las tangentes de $\mathcal{C}$, luego $\text{mult}_P(Y) \geq \text{mult}_P(\mathcal{C}) = r \geq s$.

[1]Fulton, W.: *Algebraic curves*, Benjamin, 1969.

Corolario.– En las condiciones anteriores, una curva Y es adjunta de $\mathcal{C}$ si y sólo si $\mathrm{mult}_P(Y) \geq \mathrm{mult}_P(\mathcal{C}) - 1$ para cada P punto múltiple de $\mathcal{C}$.

Demostración.– El hecho de que Y sea adjunta es claramente equivalente a $\mathrm{div}(Y) - E \succeq 0$, o lo que es igual,

$$\mathrm{ord}_Q(G) \geq r_Q - 1, \ \forall Q \in X;$$

lo que, aplicando el lema para $s = r_P - 1 = r_Q - 1$, nos da directamente el resultado.

Con estos antecedentes podemos enunciar el Teorema del Residuo, aunque la demostración tardará en llegar.

Teorema del Residuo. En las condiciones anteriores, supongamos que D y D' son divisores efectivos de X, con $D \equiv D'$. Supongamos también que Y es una adjunta de grado m tal que

$$\mathrm{div}(Y) = D + E + A,$$

para una cierto A efectivo. Entonces existe una adjunta Y' de grado m tal que

$$\mathrm{div}(Y') = D' + E + A.$$

2. Las condiciones de Noether.

Recuperamos las notaciones habituales dadas en teoría: dado un conjunto finito de puntos $P_1, ..., P_n \in \mathbf{P}^2$ y una curva C dada por un polinomio reducido homogéneo F de grado d, podemos definir a partir de C una función

$$F_* = C_* = \frac{F}{L^d} \in \mathcal{O}_{P_i}\left(\mathbf{P}^2\right), \text{ para todo } i,$$

donde L es una recta (podemos tomar cualquiera porque cambiar de recta es multiplicar por una unidad) que no pase por ninguno de los P_i.

Sea ahora P un punto del plano proyectivo C_0 y C_1 curvas proyectivas sin componentes comunes dadas por polinomios[2] reducidos F y G. Sea C_2 otra curva dada por otro polinomio reducido H. Se dice que se satisfacen las *condiciones de Noether en P respecto de C_0, C_1 y C_2 (o respecto a F, G y H)* cuando

$$H_* \in (F_*, G_*) \subset \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right),$$

esto es, si existen $a, b \in \mathcal{O}_P(\mathbf{P}^2)$ verificando $H_* = aF_* + bG_*$.

Las condiciones de Noether son claramente locales, pero el llamado Teorema Fundamental de Max Noether relaciona esta dependencia local con una dependencia global.

Teorema Fundamental de Max Noether. Sean F, G y H polinomios reducidos que definen curvas proyectivas planas C_0, C_1, C_2; de forma que C_0 y C_1 no tienen componentes comunes. Entonces existe una ecuación

$$H = A \cdot F + B \cdot G$$

(donde A y B son polinomios homogéneos en $\mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$) si y sólo si las condiciones de Noether se satisfacen en todos los puntos de $C_0 \cap C_1$.

Demostración.– Desde luego la condición global implica necesariamente las condiciones de Noether en todos los puntos de la intersección. Veamos la otra prueba. Podemos suponer, en principio, que $X_2 = 0$ no contiene a ningún punto de la intersección, esto es,

$$\mathcal{V}_h(F, G, X_2) = \emptyset.$$

[2] A partir de ahora, todos los polinomios que aparecen se consideran homogéneos.

Tomando entonces como recta $X_2 = 0$ obtenemos

$$F_* = F(X_0, X_1, 1), \;\; G_* = G(X_0, X_1, 1), \;\; H_* = H(X_0, X_1, 1),$$

mediante la identificación natural $\mathcal{O}_P(\mathbf{P}^2) \simeq \mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2)$ haciendo $X_2 = 1$. Las condiciones de Noether aseguran que, en todo P de $C_0 \cap C_1$,

$$H_* = 0 \text{ en } \mathcal{O}_P(\mathbf{P}^2)/(F_*, G_*).$$

Esto, junto con el primer problema de la relación del tema 5 (usando de nuevo la identificación de anillos locales) asegura que

$$H_* = 0 \text{ en } \mathbf{k}[X,Y]/(F_*, G_*),$$

esto es, existen polinomios $a, b \in \mathbf{k}[X,Y]$ tales que $H_* = aF_* + bG_*$. Si ahora homogeneizamos F_* y G_* para dar F y G obtenemos, en general

$$HX_2^r = AF + BG,$$

con A y B polinomios que podemos suponer homogéneos en $\mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$. Sin embargo, si consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]/(F,G) & \longrightarrow & \mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]/(F,G) \\ T & \longmapsto & X_2 T \end{array}$$

es inyectiva, ya que X_2 no pasa por ninguno de los puntos de $C_0 \cap C_1$. Veamos esto.

Lo que tenemos que probar es

$$X_2 T = AF + BG \implies T = A'F + B'G,$$

para ciertos A' y B' (que siempre podemos suponer homogéneos si T lo es). En general, para cualquier polinomio $S(X_0, X_1, X_2)$, denotaremos

$$S_0(X_0, X_1) = S(X_0, X_1, 0).$$

Como F, G y X_2 no tienen ceros comunes, se tiene que F_0 y G_0 han de ser necesariamente polinomios homogéneos primos entre sí. Por otro lado $X_2 T = AF + BG$ implica $A_0 F_0 = -B_0 G_0$ y, por lo anterior, ha de existir $C(X_0, X_1)$ tal que

$$A_0 = -CG_0, \;\; B_0 = CF_0.$$

Definimos entonces $A_1 = A + CG$ y $B_1 = B - FC$. Se tiene

$$(A_1)_0 = A_0 + C_0 G_0 = A_0 + CG_0 = 0,$$

y, análogamente, $(B_1)_0 = 0$, con lo que $A_1 = X_2 A'$ y $B_1 = X_2 B'$ para ciertos A', B'. Entonces

$$X_2 T = AF + BG = (A_1 - CG)F + (B_1 + FC)G = A_1 F + B_1 G,$$

de donde

$$T = A'F + B'G.$$

Por tanto la $HX_2^r \in (F,G)$ implica necesariamente $H \in (F,G)$ y esto finaliza la demostración del Teorema de Max Noether.

3.- La demostración del Teorema del Residuo.

Antes de entrar directamente en la prueba, veremos algunos complementos técnicos necesarios que relacionan las condiciones de Noether con el proceso de resolución de singularidades.

Lema 1.– Con las notaciones habituales para $\mathcal{C}$, f, X, P y $Q_1, ..., Q_r$, si $h \in K(\mathcal{C})$ y $\mathrm{ord}_{Q_i}(h) \geq r-1$, entonces $h \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C})$.

Demostración.– Escojamos un entorno de P lo suficientemente pequeño como para que h no tenga polos en él salvo, a lo más P. Esto es, sea U tal que para todo $R \in U$, $R \neq P$, tengamos $h \in \mathcal{O}_R(\mathcal{C})$. Podemos suponer además que U es afín y que $f : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ dota a $A(f^{-1}U)$ de una estructura de $A(U)$–módulo finito. Esto se ha demostrado en teoría.

Además, en la demostración de teoría veíamos que $\mathrm{ord}_{Q_i}(x) = 1$, donde $x = 0$ es la ecuación local del divisor excepcional y $x^{r-1}A(f^{-1}U) \subset A(U)$.

Por otro lado, como $\mathrm{ord}_{Q_i}(h) \geq r-1$ tenemos que $hx^{1-r} \in A(f^{-1}U)$, de donde

$$h = x^{r-1}\left(hx^{1-r}\right) \in A(U) \subset \mathcal{O}_P(\mathcal{C}),$$

lo que demuestra el resultado.

Lema 2.– En las condiciones anteriores, sea F un polinomio reducido definiendo $\mathcal{C}$ y sean Y y Z curvas definidas por polinomios reducidos G y H, respectivamente. Suponemos además que F y G no tienen componentes comunes. Las condiciones de Noether se verifican en P (respecto de F, G y H) si y sólo si

$$\mathrm{ord}_{Q_i}(H) \geq \mathrm{ord}_{Q_i}(G) + r - 1, \ i = 1, ..., r.$$

Demostración.– Hay que probar que $H_* \in (F_*, G_*) \subset \mathcal{O}_P(\mathbf{P}^2)$. O, lo que es igual, que $H_* + (F_*) \in (\bar{G_*}) \subset \mathcal{O}_P(\mathbf{P}^2)/(F_*)$. O, lo que es igual, que

$$h = \frac{H_*}{G_*} \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C}).$$

O, lo que es igual, el lema 1 que acabamos de demostrar.

Con estos resultados podemos ya demostrar el Teorema del Residuo tal y como lo enunciamos anteriormente.

Demostración del Teorema del Residuo.– Dado que D y D' son equivalentes, sabemos que existen curvas Z y Z' dadas por polinomios reducidos H y H', del mismo grado, verificando

$$D + \mathrm{div}(H) = D' + \mathrm{div}(H'),$$

con lo que tendremos (denotando por G un polinomio reducido que defina la curva Y)

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(GH) &= \mathrm{div}(G) + \mathrm{div}(H) \\ &= D + E + A + \mathrm{div}(H) \\ &= D' + E + A + \mathrm{div}(H') \\ &> \mathrm{div}(H') + E. \end{aligned}$$

Aplicando entonces el lema 2 vemos que las condiciones de Noether se satisfacen para F, H' y GH, en todo $P \in \mathcal{C}$, luego tenemos una ecuación de la forma

$$GH = F'F + G'H', \text{ para ciertos } F', G',$$

de donde podemos deducir que, como $\mathrm{div}(F) = 0$,

$$\mathrm{div}(G') = \mathrm{div}(GH) - \mathrm{div}(H') = D' + E + A.$$