Nota.- Las notas de este tema son un resumen de los resultados probados en clase (de teoría o de prácticas). Francisco J. Castro Jiménez, José M. Tornero Sánchez han participado en la confección de las mismas. Para su realización hemos consultado la bibliografía citada al final del programa de la asignatura. En particular hemos seguido muy de cerca el libro de W. Fulton "Algebraic Curves", Benjamin, 1969.

Tema 6.- Teorema de Riemann.

Sea C una curva plana proyectiva (de ecuación $F = 0$) y sea $f : X \to C$ el modelo no singular de C.

Teorema 6.1.1 (de Riemann) *Existe $g \in \mathbf{N}$ tal que, para todo divisor D en X, se tiene $d(D) \geq \mathrm{grado}(D)+1-g$.*

Dada la curva plana proyectiva C (y su modelo no singular X) al menor entero g verificando el teorema de Riemann se le llama el género de C (o de X o de $K(X) = K(C)$).

Corolario 6.1.2 *1) Sea D un divisor tal que $d(D) = \mathrm{grado}(D) + 1 - g$. Si E es un divisor tal que $E \succeq D$ entonces $d(E) = \mathrm{grado}(E) + 1 - g$.*
2) Sea $\xi \in K(X) \setminus \mathbf{k}$. Entonces se tiene $g = \mathrm{grado}(r\mathrm{div}(\xi)_0) + 1 - d(r\mathrm{div}(\xi)_0)$ para $r \gg 0$.
3) Existe un entero $n(C)$ tal que, para todo divisor E de grado mayor o igual que $n(C)$, se tiene $d(E) = \mathrm{grado}(E) + 1 - g$.

Proposición 6.1.3 *Sea C una curva plana proyectiva de grado n, con sólo puntos múltiples ordinarios como singularidades. El género g de C es igual a*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{m_P(C)(m_P(C)-1)}{2}.$$

Una curva definida por un polinomio homogéneo G (no múltiplo de F) se dice adjunta de C si $\mathrm{div}(G) \succeq E_X$.
Aserto.- G es adjunta de C si y sólo si $m_P(G) \geq m_P(C) - 1$, para todo punto P de C. Más precisamente, sea $P \in C$; $m_P(G) \geq m_P(C) - 1$ si y sólo si $\mathrm{ord}_Q(G) \geq m_P(C) - 1$ para todo $Q \in f^{-1}(P)$.

Recordemos que F es una ecuación de C (en posición general respecto de $x_2 = 0$). Notemos, para cada $m \in \mathbf{N}$, V_m el espacio vectorial[1] de los polinomios homogéneos de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$, de grado m tales que o bien G es múltiplo de F, o bien G es adjunta de C . Sabemos que

$$\dim(V_m) \geq \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{r_P(r_P-1)}{2}$$

y que esta desigualdad es una igualdad si $m \gg 0$.

Sea $\phi_m : V_m \to \mathcal{L}(E_m)$ la aplicación definida por $\phi_m(H) = H/x_2^m$. ϕ_m está bien definida pues $\mathrm{div}(H/x_2^m) + m(\sum_{i=1}^n P_i) - E = \mathrm{div}(H) - E - m\mathrm{div}(x_2) + m(\sum_{i=1}^n P_i) \geq 0$. ϕ_m es lineal y su núcleo es el conjunto de elementos de V_m que son múltiplos de F (ya que si $H/x_2^m = 0 \in K(X)$ entonces H es cero en el anillo de coordenadas proyectivas de la curva C; es decir, H es múltiplo de F).

Además ϕ_m es sobreyectiva. La siguiente sucesión de espacios vectoriales y morfismos es exacta:

$$0 \to Ker(\phi_m) \xrightarrow{\psi} V_m \to \mathcal{L}(E_m) \to 0$$

El núcleo $Ker(\phi_m)$ se identifica al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado $m - n$ en cuyo caso $\psi(R) = RF$.

Corolario 6.1.4 *Sea C una curva plana proyectiva irreducible de grado n. 1) Se verifica: $g \leq g^*(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{r_P(r_P-1)}{2}$.*
2) Si $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \sum_{P \in C} \frac{r_P(r_P-1)}{2}$ entonces C es racional.

[1] Se añade el 0.

Demostración. Basta probar 1). En el tema 4 hemos probado que $g^*(C)$ decrece por transformaciones cuadráticas y que mediante un número finito de éstas la curva C puede llevarse a una curva C' con sólo puntos múltiples ordinarios como singularidades. Como C' es birracionalmente equivalente a C, ambas tienen el mismo género g. Así $g^*(C) \geq g^*(C') = g$. $\square$