Nota.- Las notas de este tema son un resumen de los resultados probados en clase (de teoría o de prácticas). Francisco J. Castro Jiménez, José M. Tornero Sánchez han participado en la confección de las mismas. Para su realización hemos consultado la bibliografía citada al final del programa de la asignatura. En particular hemos seguido muy de cerca el libro de W. Fulton "Algebraic Curves", Benjamin, 1969.

Tema 7.- Derivaciones y diferenciales. Divisores canónicos

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo (arbitrario), sea R un anillo que contenga a $\mathbf{k}$ como subanillo y sea M un R-módulo.

Definición 7.1.1 *Una $\mathbf{k}$-derivación de R en M (o una derivación de R en M sobre $\mathbf{k}$) es un homomorfismo de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales $\delta : R \to M$ verificando: $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$ para todo $a, b \in R$.*

Nótese que $\delta(\lambda) = 0$ para toda derivación δ y para todo $\lambda \in \mathbf{k}$.

El conjunto de las $\mathbf{k}$-derivaciones de R en M se denotará por $Der_{\mathbf{k}}(R, M)$. Escribiremos $Der_{\mathbf{k}}(R)$ en lugar de $Der_{\mathbf{k}}(R, R)$.

Ejemplos de derivaciones:.- Sea $R = M = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$.
1) $\delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ es una derivación.
2) Sean $a_1, \ldots, a_n$ polinomios en R. Entonces $\delta = \sum_i a_i\delta_i$ es una derivación de R en R (sobre $\mathbf{k}$).

Lema 7.1.2 $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(R, M)$ *es un R-módulo.*

Proposición 7.1.3 *Si en las condiciones anteriores R es un dominio, $\mathbf{K}$ es su cuerpo de fracciones, M es un $\mathbf{K}$-espacio vectorial y $\delta : R \to M$ es una $\mathbf{k}$-derivación, entonces δ se puede extender de forma única a una $\mathbf{k}$-derivación $\widetilde{\delta} : \mathbf{K} \to M$.*

Así, $Der_{\mathbf{k}}(R, M)$ puede considerarse como un $\mathbf{k}$-subespacio vectorial de $Der_{\mathbf{k}}(\mathbf{K}, M)$.

Sea $F = \bigoplus_{x \in R} R\epsilon_x$ el R-módulo libre de base R. Sea S_1 el conjunto $S_1 = \{\epsilon_{x+y} - \epsilon_x - \epsilon_y \,|\, x, y \in R\}$. Análogamente $S_2 = \{\epsilon_{\lambda x} - \lambda\epsilon_x \,|\, x \in R, \lambda \in \mathbf{k}\}$, $S_3 = \{\epsilon_{xy} - x\epsilon_y - y\epsilon_x \,|\, x, y \in R\}$. Notemos F' el submódulo de F generado por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Notemos $\Omega_{\mathbf{k}}(R) = F/F'$ el R-módulo cociente. Para $x \in R$ se denota por dx la clase de ϵ_x en $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ y por $d : R \to \Omega_{\mathbf{k}}(R)$ la aplicación que asocia a cada x el elemento dx.

Definición 7.1.4 *El R-módulo $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ se llamará el módulo de las formas diferenciales (o de las diferenciales de Kähler) de R sobre $\mathbf{k}$.*

$\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ tiene la siguiente propiedad universal.

Proposición 7.1.5 *La aplicación $d : R \to \Omega_{\mathbf{k}}(R)$ es una derivación. Para todo R-módulo M y toda derivación $\delta : R \to M$ existe un único morfismo de R-módulos $\phi : \Omega_{\mathbf{k}}(R) \to M$ tal que $\delta = \phi \circ d$. Si R es un dominio y $\mathbf{K}$ su cuerpo de fracciones, entonces la derivación $d : R \to \Omega_{\mathbf{k}}(R)$ se extiende a la derivación $d : \mathbf{K} \to \Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{K})$.*

Nota.- Si R es un dominio (como antes) de cuerpo de fracciones $\mathbf{K}$ y $\xi = x/y \in \mathbf{K}$ (con $x, y \in R, y \neq 0$) entonces $dx = d(\xi y) = yd(\xi) + \xi dy$ lo que prueba que $d(\xi) = y^{-2}(ydx - xdy)$.

Ejemplo 7.1.6 *1.- Si $R = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces para cada $F(x_1, \ldots, x_n) \in R$ se tiene*

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)dx_i.$$

Es decir, el R-módulo $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ está generado por $dx_1, \ldots, dx_n$.
2.- Más generalmente, si R es un anillo cualquiera, $r_1, \ldots, r_m$ son elementos de R y si $F(x_1, \ldots, x_m)$ es un polinomio de $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_m]$, se tiene (puesto que d es una derivación en $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(R, \Omega_{\mathbf{k}}(R))$) $dF(r_1, \ldots, r_m) =$

$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i}(r_1,\dots,r_m)dr_i$. *En particular, si R es la $\mathbf{k}$-álgebra generada por $r_1,\dots,r_m$ entonces, el R-módulo $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ está generado por $dr_1,\dots,dr_m$.*
3.- Si R es la $\mathbf{k}$-álgebra afín $\mathbf{k}[r_1,\dots,r_m]$ (como antes) y R es un dominio, entonces el cuerpo de fracciones $\mathbf{K}$ de R es $\mathbf{k}(r_1,\dots,r_m)$ y $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{K})$ está generado (sobre $\mathbf{K}$) por $dr_1,\dots,dr_m$ y es por tanto un $\mathbf{K}$-espacio vectorial de dimensión finita.

A partir de ahora se supone $car(\mathbf{k})=0$.

Proposición 7.1.7 *Sea C una curva proyectiva irreducible con cuerpo de funciones racionales $\mathbf{K}=K(C)$. Entonces $\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{K})$ es un $\mathbf{K}$-espacio de dimensión 1. Más aún, si $\xi\in\mathbf{K}$, $\xi\notin\mathbf{k}$, entonces $d\xi$ es una base de $\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{K})$ sobre $\mathbf{K}$.*

Proposición 7.1.8 *Sea C una curva plana proyectiva irreducible y sea K su cuerpo de funciones racionales. Sea $\mathcal{O}$ un anillo de valoración discreta de K y ξ un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}$. Entonces para todo $\eta\in\mathcal{O}$ se tiene $\frac{d\eta}{d\xi}\in\mathcal{O}$.*

7.2 Orden de una forma diferencial en un punto

Sea C una curva plana proyectiva irreducible, X su modelo no singular y sea $\mathbf{K}$ su cuerpo de funciones racionales. Sea ω una forma diferencial no nula, en $\Omega=\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{K})$. Si Q es un punto de X y ξ es un parámetro de uniformización en $\mathcal{O}=\mathcal{O}_Q(X)$, se escribe $\omega=\alpha d\xi$ (para un único $\alpha\in\mathbf{K}$). Se define el orden de ω en Q (y se denota $\mathrm{ord}_Q(\omega)$) como el orden de α en Q. La definición es consistente pues si η es otro parámetro de uniformización en $\mathcal{O}$, entonces $w=\alpha d\xi=\beta d\eta$ (para un único $\beta\in K$). Se tiene entonces (por 7.1.8) $\alpha/\beta=d\eta/d\xi\in\mathcal{O}$ y $\beta/\alpha=d\xi/d\eta\in\mathcal{O}$. Así $\mathrm{ord}_Q(\alpha/\beta)=0$.

Teorema 7.2.1 *Sea C una curva proyectiva plana, irreducible, de grado $d\geq 3$, con únicamente puntos múltiples ordinarios como singularidades. Sea $G\in\mathbf{k}[X_0,X_1,X_2]$ homogéneo, de grado $d-3$. Entonces existe $\omega\in\Omega_{\mathbf{k}}(K)$ tal que para todo $Q\in X$, $\mathrm{ord}_Q(w)=\mathrm{ord}_Q(G)-(r_Q-1)$. En particular, la suma $\sum_{Q\in X}\mathrm{ord}_Q(\omega)Q$ define un divisor y este divisor es $\mathrm{div}(G)-E_X=\mathrm{div}(G)-\sum_{Q\in X}(r_Q-1)Q$.*

El divisor $\sum_{Q\in X}\mathrm{ord}_Q(\omega)Q$ que se obtiene en el teorema se denotará $\mathrm{div}(\omega)$.

7.3 Divisores canónicos

Cada divisor de la forma $\mathrm{div}(\omega)$ (para $0\neq\omega\in\Omega_{\mathbf{k}}(K)$) se llamará un divisor canónico (sobre X). Sean ω,ω' dos formas diferenciales no nulas. Entonces, existe $\gamma\in K$ tal que $\omega=\gamma\omega'$. Así, $\mathrm{div}(\omega)=\mathrm{div}(\gamma\omega')=\mathrm{div}(\gamma)+\mathrm{div}(\omega')$ y por tanto dos divisores canónicos son linealmente equivalentes. Recíprocamente, si D es un divisor en X, linealmente equivalente a un divisor canónico $\mathrm{div}(\omega)$, se tiene $D=\mathrm{div}(\gamma)+\mathrm{div}(\omega)=\mathrm{div}(\gamma\omega)$. Así, D es también un divisor canónico.

Corolario 7.3.1 (al teorema 7.2.1) *Sea W un divisor canónico en X. Entonces* $\mathrm{grado}(W)=2g-2$ *y $d(W)\geq g$.*