Tema 8.- Derivaciones y diferenciales. Divisores canónicos.

8.1. El módulo de diferenciales de un anillo.

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo (arbitrario), sea R un anillo que contenga a $\mathbf{k}$ como subanillo y sea M un R-módulo.

Definición.– Una $\mathbf{k}$-derivación de R en M (o una derivación de R en M sobre $\mathbf{k}$) es un homomorfismo de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales $\delta : R \longrightarrow M$ verificando:

$$\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a), \text{ para todo } a, b \in R.$$

Nótese que $\delta(\lambda) = 0$ para toda derivación δ y para todo $\lambda \in \mathbf{k}$.

Ejemplos de derivaciones.– 1) $R = M = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ 1 \leq i \leq n$$

es una derivación.

2) Sean $a_1, \dots, a_n$ polinomios en R. Entonces $\delta = \sum_i a_i \delta_i$ es una derivación de R en R (sobre k).

Lema.– $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(R)$ es un R-módulo.

Proposición.– Si en las condiciones anteriores R es un dominio, K es su cuerpo de fracciones, M es un K-espacio vectorial y $\delta : R \to M$ es una $\mathbf{k}$-derivación, entonces δ se puede extender de forma única a una $\mathbf{k}$-derivación $\widetilde{\delta} : K \to M$.

Sea $F = \bigoplus_{x \in R} R\epsilon_x$ el R-módulo libre de base R. Sea S_1 el conjunto

$$S_1 = \{\epsilon_{x+y} - \epsilon_x - \epsilon_y \mid x, y \in R\}.$$

Análogamente

$$S_2 = \{\epsilon_{\lambda x} - \lambda \epsilon_x \mid x \in R, \lambda \in \mathbf{k}\},\ \ S_3 = \{\epsilon_{xy} - x\epsilon_y - y\epsilon_x \,|\, x, y \in R\}.$$

Notemos F' el submódulo de F generado por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ y notemos $\Omega_{\mathbf{k}}(R) = F/F'$ el R-módulo cociente. Para $x \in R$ se denota por dx la clase de ϵ_x en $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ y por $d : R \to \Omega_{\mathbf{k}}(R)$ la aplicación que asocia a cada x el elemento dx.

Definición.– El R-módulo $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ se llamará el módulo de las diferenciales (o de las diferenciales de Kähler) de R sobre $\mathbf{k}$.

Proposición (propiedad universal de $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$).– La aplicación $d : R \to \Omega_{\mathbf{k}}(R)$ es una derivación. Para todo R-módulo M y toda derivación $\delta : R \to M$ existe un único morfismo de R-módulos $\phi : \Omega_{\mathbf{k}}(R) \to M$ tal que $\delta = \phi \circ d$. Si R es un dominio y $\mathbf{K}$ su cuerpo de fracciones, entonces la derivación $d : R \to \Omega_{\mathbf{k}}(R)$ se extiende a la derivación $d : \mathbf{K} \to \Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{K})$.

Ejemplos de módulos de diferenciales.– 1.- Si $R = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$, entonces para cada $F(x_1, \dots, x_n) \in R$ se tiene

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i.$$

2.- Más generalmente, si R es un anillo cualquiera, $r_1, \dots, r_m$ son elementos de R y si $F(x_1, \dots, x_m)$ es un polinomio de $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$, se tiene (puesto que d es una derivación en $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(R, \Omega_{\mathbf{k}}(R))$)

$$dF(r_1, \dots, r_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i}(r_1, \dots, r_m) dr_i.$$

En particular, si R es la $\mathbf{k}$-álgebra generada por $r_1, \ldots, r_m$ entonces, el R-módulo $\Omega_{\mathbf{k}}(R)$ está generado por $dr_1, \ldots, dr_m$.

3.- Si R es la $\mathbf{k}$-álgebra afín $\mathbf{k}[r_1, \ldots, r_m]$ (como antes) y R es un dominio, entonces el cuerpo de fracciones $\mathbf{K}$ de R es $\mathbf{k}(r_1, \ldots, r_m)$ y $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{K})$ está generado (sobre $\mathbf{K}$) por $dr_1, \ldots, dr_m$.

Proposición.– Sea C una curva plana proyectiva irreducible y sea K su cuerpo de funciones racionales. Sea $\mathcal{O}$ un anillo de valoración discreta de K y ξ un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}$. Entonces para todo $\eta \in \mathcal{O}$ se tiene $\eta' = d\eta/d\xi \in \mathcal{O}$.

8.2. Orden de una diferencial en un punto.

Sea C una curva plana proyectiva irreducible, X su modelo no singular y sea K su cuerpo de funciones racionales. Sea ω una diferencial (o una forma diferencial) no nula, en $\Omega = \Omega_{\mathbf{k}}(K)$.

Definición.– Si Q es un punto de X y ξ es un parámetro de uniformización en $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Q(X)$, se escribe $\omega = \alpha d\xi$ (para un único $\alpha \in K$). Se define el orden de ω en Q (y se denota $\mathrm{ord}_Q(\omega)$) como el orden de α en Q.

La definición es consistente pues si η es otro parámetro de uniformización en $\mathcal{O}$, entonces $w = \alpha d\xi = \beta d\eta$ (para un único $\beta \in K$). Se tiene entonces

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{d\eta}{d\xi} \in \mathcal{O} \text{ y, así mismo, } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{d\xi}{d\eta} \in \mathcal{O}.$$

Entonces $\mathrm{ord}_Q(\alpha/\beta) = 0$.

Teorema.– Sea C una curva proyectiva plana, irreducible, de grado $d \geq 3$, con únicamente puntos múltiples ordinarios como singularidades. Sea $G \in \mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$ homogéneo, de grado $d-3$. Entonces existe $\omega \in \Omega_{\mathbf{k}}(K)$ tal que para todo $Q \in X$,

$$\mathrm{ord}_Q(w) = \mathrm{ord}_Q(G) - (r_Q - 1).$$

En particular, la suma $\sum_{Q \in X} \mathrm{ord}_Q(\omega) Q$ define un divisor y este divisor es

$$\mathrm{div}(G) - E_X = \mathrm{div}(G) - \sum_{Q \in X} (r_Q - 1) Q.$$

El divisor $\sum_{Q \in X} \mathrm{ord}_Q(\omega) Q$ que se obtiene en el teorema se denotará $\mathrm{div}(\omega)$.

8.3. Divisores canónicos.

Cada divisor $\mathrm{div}(\omega)$ (para $0 \neq \omega \in \Omega_k k(K)$) se llamará un divisor canónico (sobre X).

Sean ω, ω' dos formas diferenciales no nulas. Entonces, existe $\gamma \in K$ tal que $\omega = \gamma\omega'$. Así,

$$\mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(\gamma\omega') = \mathrm{div}(\gamma) + \mathrm{div}(\omega')$$

y, por tanto, dos divisores canónicos son linealmente equivalentes.

Recíprocamente, si D es un divisor en X, linealmente equivalente a un divisor canónico $\mathrm{div}(\omega)$, se tiene

$$D = \mathrm{div}(\gamma) + \mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(\gamma\omega).$$

Así, D es también un divisor canónico.

Corolario (al Teorema de 8.2.).– Sea W un divisor canónico en X. Entonces $\mathrm{grado}(W) = 2g - 2$ y $d(W) \geq g$.