Nota.- Las notas de este tema son un resumen de los resultados probados en clase (de teoría o de prácticas). Francisco J. Castro Jiménez, José M. Tornero Sánchez han participado en la confección de las mismas. Para su realización hemos consultado la bibliografía citada al final del programa de la asignatura. En particular hemos seguido muy de cerca el libro de W. Fulton "Algebraic Curves", Benjamin, 1969.

Tema 8.- Teorema de Riemann-Roch

Teorema 8.1.1 (Teorema de Riemann-Roch) *Sea W un divisor canónico en X. Entonces, para todo divisor D se tiene* $d(D) = \text{grado}(D) + 1 - g + d(W - D)$.

La igualdad del enunciado del teorema para un divisor D se denotará $[\text{R-R}]_D$.

Como $\text{grado}(W) = 2g - 2$ el teorema de Riemann-Roch se verifica para D si y sólo si se verifica para $W - D$.

Lema 8.1.2 (Lema de reducción de Noether) *Sean W un divisor canónico, D un divisor en X y $P \in X$ tales que $d(D) > 0$ y $d(W - D - P) \neq d(W - D)$. Entonces $d(D + P) = d(D)$.*

Proposición 8.1.3 *Sea D un divisor sobre X tal que $d(W - D) = 0$. Entonces se verifica la igualdad $[\text{R-R}]_D$.*

Proposición 8.1.4 *Sea D un divisor sobre X tal que $d(W - D) > 0$ y $[\text{R-R}]_{D+P}$ es cierta para todo punto P de X. Entonces se verifica la igualdad $[\text{R-R}]_D$.*

Demostración. Si $d(D) = 0$ entonces $d(W - (W - D)) = 0$ y por 8.1.3 se tiene $[\text{R-R}]_{W-D}$ y por tanto se tiene $[\text{R-R}]_D$. Podemos suponer $d(D) > 0$. Sea P tal que $d(W - D - P) = d(W - D) - 1$. Por el lema de reducción debe ser $d(D + P) = d(D)$ (hay que utilizar que $d(D) > 0$). Pero se tiene $d(D + P) = \text{grado}(D + P) + 1 - g + d(W - (D + P))$ y de aquí la fórmula $[\text{R-R}]_D$. □

Demostración (del teorema de Riemann-Roch). Por la proposición 8.1.3 basta probar el teorema para D tal que $d(W - D) > 0$. Debe ser $2g - 2 = \text{grado}(W) \geq \text{grado}(D)$. Sea D de grado maximal para el que el teorema sea falso. Eso quiere decir que estamos en la hipótesis de 8.1.4, ya que si
a) $d(W - (D + P)) > 0$ se aplica que D es de grado maximal de entre los que, en las hipótesis anteriores, no verifican R-R.
b) Si $d(W - (D + P)) = 0$ entonces se tiene $[\text{R-R}]_{D+P}$ por 8.1.3.

Se llega por tanto a una contradicción. Esto prueba el teorema. □