Tema 9.- Teorema de Riemann-Roch.

Teorema (de Riemann-Roch).– Sea W un divisor canónico en X. Entonces, para todo divisor D se tiene

$$d(D) = \text{grado}(D) + 1 - g + d(W - D).$$

Si el grado de D es mayor, estrictamente, que grado$(W) = 2g - 2$ entonces grado$(W - D) < 0$ y por tanto $d(W - D) = 0$.

En ese caso, para grado(D) suficientemente grande se tiene la igualdad ("de Riemann")

$$d(D) = \text{grado}(D) + 1 - g.$$

Por tanto, existe un entero N_0, tal que para grado$(D) \geq N_0$ se verifica el teorema de Riemann-Roch.

Veremos cómo deducir la igualdad

$$[\text{R-R}]_D \qquad d(D) = \text{grado}(D) + 1 - g + d(W - D)$$

de la igualdad $[\text{R-R}]_{D+P}$.

Ejercicio 1.– Si D y D' son divisores tales que $D \preceq D'$ entonces

$$d(D') \leq d(D) + \text{grado}(D') - \text{grado}(D).$$

Ejercicio 2.– Si $D \in Div(X)$, entonces $d(D) \geq 1$ si y sólo si D es linealmente equivalente a un divisor D' efectivo.

Ejercicio 3.– Sea $D \in Div(X)$tal que $d(D) \geq 1$. Entonces, para casi todo $P \in X$ se tiene

$$d(D) = d(D - P) + 1.$$

Lema (de reducción de Noether).– Sean W un divisor canónico, D un divisor en X y $P \in X$ tales que $d(D) > 0$ y $d(W - D - P) \neq d(W - D)$. Entonces

$$d(D + P) = d(D).$$

Proposición 1.– Sea D un divisor sobre X tal que $d(W - D) = 0$. Entonces se verifica la igualdad $[R - R]_D$.

Proposición 2.– Sea D un divisor sobre X tal que $d(W - D) > 0$ y $[\text{R-R}]_{D+P}$ es cierta para todo punto P de X . Entonces se verifica la igualdad $[\text{R-R}]_D$.

Las proposiciones 1 y 2 implican el teorema de Riemann-Roch.