Notas de la asignatura AMPLIACIÓN DE GEOMETRÍA de la Licenciatura de Matemáticas, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, para el curso 2000-01

Departamento de Algebra

Septiembre 2000

Tema 1.- El espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$. Sistemas de referencia. Dualidad.

1.1 El espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$.

En este punto nos remitimos a las notas escritas de GEOMETRÍA del primer curso de la licenciatura, para el repaso de los conceptos básicos allí estudiados: dependencia lineal, variedades lineales, ecuaciones, dimensión, retículo y el espacio afín.

1.2 Sistemas de referencia.

En los espacios vectoriales existe un concepto de *base* que permite asignar coordenadas a los vectores respecto de la base dada. En el espacio afín se han estudiado sistemas de referencia afines que permiten asignar coordenadas a los puntos. Nuestro objetivo es realizar un proceso análogo en el espacio proyectivo, o en una variedad lineal proyectiva en general.

La primera dificultad estriba en que los puntos de $\mathbb{P}_n$ están definidos por una clase de equivalencia de vectores, luego las coordenadas de un punto están siempre definidas salvo un escalar. La segunda dificultad, originada por el mismo hecho, está en fijar una base de una variedad lineal proyectiva. Por ejemplo, sea la recta $L = L_p(P_0, P_1)$, con $P_0 = (1 : 1 : 0)$ y $P_1 = (1 : 2 : 0)$, que forman una base de L.

Tomemos ahora el punto $P = (0 : -1 : 0)$. Se puede argumentar que como

$$(0, -1, 0) = (1, 1, 0) - (1, 2, 0),$$

las coordenadas de P respecto de la base $\{P_0, P_1\}$ son $(1 : -1)$.

Sin embargo, este razonamiento es erróneo. En efecto, escribiendo P_0 como $(2 : 2 : 0)$, P_1 como $(-1 : -2 : 0)$, y P como $(0 : -2 : 0)$, se tiene que

$$(0, -2, 0) = (2, 2, 0) + 2(-1, -2, 0),$$

luego a P corresponderían coordenadas $(1 : 2)$ respecto de la misma base. Sin embargo, $(1 : 2) \neq (1 : -1)$.

Ante estos fenómemos, lo que se hace es añadir un punto más a la base de la variedad lineal proyectiva, que permita fijar o normalizar la elección de los vectores en los puntos de la base.

Definición 1.2.1.– Sea $L \subset \mathbb{P}_n$ una variedad lineal proyectiva no vacía de dimensión $r \geq 0$. Un *sistema de referencia (proyectivo) en* L es un conjunto (ordenado) $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_r, P_{r+1}\}$ de $r + 2$ puntos de L tales que $r + 1$ cualesquiera de ellos forman una base de L, i.e., son linealmente independientes.

En particular, un sistema de referencia en una recta proyectiva está formado por 3 puntos distintos.

El siguiente lema garantiza la existencia de sistemas de referencia proyectivos y da un proceso para obtenerlos.

Lema 1.2.2.– Sea $M \subset k^{n+1}$ un subespacio vectorial de dimensión $r + 1$ y sea $\mathcal{S} = \{\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_{r+1}\}$ un subconjunto de M con $r + 2$ vectores. Las condiciones siguientes son equivalentes:

- Cualquier subconjunto de $\mathcal{S}$ de $r + 1$ vectores es linealmente independiente.
- El subconjunto $\{\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ es linealmente independiente y $\mathbf{w}_{r+1} = \lambda_0 \mathbf{w}_0 + \cdots + \lambda_r \mathbf{w}_r$, con $\lambda_i \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Demostración: Es un ejercicio sencillo de Álgebra Lineal. □

Definición 1.2.3.– Dado un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_r; P_{r+1}\}$ de L, diremos que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subset \bar{\pi}^{-1}(L)$ es una *base normalizada de* $\mathcal{R}$ si se verifica que

- $\pi(\mathbf{v}_i) = P_i$, $i = 0, \ldots, r$.
- $\pi(\mathbf{v}_0 + \cdots + \mathbf{v}_r) = P_{r+1}$

Proposición 1.2.4.– Sea $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_r; P_{r+1}\}$ un sistema de referencia de L. Se tiene:

1. $\mathcal{R}$ tiene bases normalizadas.
2. Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}'_0, \ldots, \mathbf{v}'_r\}$ son dos bases normalizadas de $\mathcal{R}$, existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\mathbf{v}'_i = \lambda \mathbf{v}_i$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Demostración:
1. Sean $\mathbf{w}_i$, $i = 0, \ldots, r+1$ vectores cualesquiera tales que $\pi(\mathbf{w}_i) = P_i$. Por el Lema 1.2.2, se tiene que $\mathbf{w}_{r+1} = \lambda_0 \mathbf{w}_0 + \cdots + \lambda_r \mathbf{w}_r$, con $\lambda_i \neq 0$, $i = 0, \ldots, r$. Por tanto, si $\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i$, se comprueba fácilmente que $\{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es una base normalizada de $\mathcal{R}$.
2. Por ser $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases normalizadas se tiene que

$$\mathbf{v}'_i = \nu_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, r \qquad \pi\left(\sum_{i=0}^{r} \mathbf{v}'_i\right) = \pi\left(\sum_{i=0}^{r} \mathbf{v}_i\right) = P_{r+1}.$$

En consecuencia, existe un δ tal que

$$\sum_{i=0}^{r} \mathbf{v}'_i = \delta\left(\sum_{i=0}^{r} \mathbf{v}_i\right).$$

Comparando con

$$\sum_{i=0}^{r} \mathbf{v}'_i = \sum_{i=0}^{r} \nu_i \mathbf{v}_i,$$

como $\mathcal{B}$ es una base, se tiene que $\delta = \nu_0 = \cdots = \nu_r$. □

Definición 1.2.5.– Sea $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_r; P_{r+1}\}$ un sistema de referencia de L, y sea $P \in L$. Sea además $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una base normalizada de $\mathcal{R}$. Se dirá que las *coordenadas de* P *respecto de* $\mathcal{R}$ son $(x_0 : \cdots : x_r)$ si se verifica que

$$P = \pi\left(\sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{v}_i\right).$$

Es decir, las coordenadas de P respecto de $\mathcal{R}$ son las de un vector de P respecto de una base normalizada de $\mathcal{R}$. Es imprescindible notar que las coordenadas de P no dependen de la base normalizada elegida de $\mathcal{R}$.

Ejemplo 1.2.6.– Sean $P_0 = (1 : 0 : \cdots : 0)$, $P_1 = (0 : 1 : 0 : \cdots : 0)$, ... , $P_n = (0 : \cdots : 0 : 1)$, y $P_{n+1} = (1 : 1 : \cdots : 1)$ puntos en $\mathbb{P}_n$. Es obvio que $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_n; P_{n+1}\}$ es un sistema de referencia de $\mathbb{P}_n$, que se llama *sistema de referencia canónico de* $\mathbb{P}_n$, porque el punto $P = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ tiene coordenadas $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ respecto de $\mathcal{R}$. En efecto, la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ es una base normalizada de $\mathcal{R}$.

Ejemplo 1.2.7.– Sea $L = L_p(P_0, P_1) \subset \mathbb{P}_2$, con $P_0 = (1 : 1 : 0)$ y $P_1 = (1 : 2 : 0)$. Entonces, $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; P_2\}$, con $P_2 = (0 : 1 : 0)$ es un sistema de referencia de L. Una base normalizada de $\mathcal{R}$ es $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-1, -2, 0)\}$. En este caso, las coordenadas de $P = (1 : 0 : 0) \in L$ respecto de $\mathcal{R}$ son $(2 : 1)$.
Las coordenadas de P_0 respecto de $\mathcal{R}$ son $(1 : 0)$. Las coordenadas de P_1 respecto de $\mathcal{R}$ son $(0 : 1)$. Las coordenadas de P_2 respecto de $\mathcal{R}$ son $(1 : 1)$. De hecho, se puede establecer una relación entre las componentes $(x_0 : x_1 : x_2)$ de un punto de L y sus coordenadas $(y_0 : y_1)$ respecto de $\mathcal{R}$ mediante la expresión:

$$(x_0, x_1, x_2) = (y_0, y_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos generalizar los resultados del ejemplo.

Nota 1.2.8.– Sea $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_r; P_{r+1}\}$ un sistema de referencia de la variedad lineal proyectiva $L \subset \mathbb{P}_n$. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una base normalizada de $\mathcal{R}$, con $\mathbf{v}_i = (a_{i0}, \ldots, a_{in})$, $i = 0, \ldots, r$. Entonces, un punto $P \in L$, $P = (x_0 : \cdots : x_n)$ tendrá coordenadas $(y_0 : \cdots : y_r)$ respecto de $\mathcal{R}$ si y sólo si existe un $\lambda \neq 0$ tal que

$$\lambda(x_0, \ldots, x_n) = (y_0, \ldots, y_r) \begin{pmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2.9.– Un caso interesante es $L : x_0 = 0$ en $\mathbb{P}_n$. Se tiene que $P_1 = (0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \ldots, P_n = (0 : 0 : \cdots : 1)$ y $Q = (0 : 1 : \cdots : 1)$ forman un sistema de referencia en L, tal que las coordenadas de un punto $P = (0 : a_1 : \cdots : a_n)$ en L, respecto de él, son $(a_1 : \cdots : a_n)$.

Proposición 1.2.10.– Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ dos sistemas de referencia de la variedad lineal proyectiva $L \subset \mathbb{P}_n$, y $P \in L$ un punto de coordenadas $(x_0 : \cdots : x_r)$ respecto de $\mathcal{R}$ y $(x'_0 : \cdots : x'_r)$ respecto de $\mathcal{R}'$. Entonces, se tiene que, existe un $\lambda \neq 0$ tal que

$$\lambda(x_0 : \cdots : x_r) = (x'_0 : \cdots : x'_r)A,$$

donde A es la matriz de cambio de una base normalizada $\mathcal{B}$ de $\mathcal{R}$ a una base normalizada $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{R}'$.

Demostración: Basta recordar que las coordenadas de P respecto $\mathcal{R}$ son las de un vector $\mathbf{u}$ respecto $\mathcal{B}$, y las de P respecto $\mathcal{R}'$ las de un vector $\mathbf{v}$ respecto $\mathcal{B}'$, con $\pi(\mathbf{u}) = P = \pi(\mathbf{v})$, y por tanto, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{v}$. El cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ en k^{n+1} hace el resto. □

Nota 1.2.11.– Sean $L \subseteq \mathbb{P}_n$ una variedad lineal proyectiva de dimensión r, $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_r; P_{r+1}\}$ un sistema de referencia en L, y $L' \subseteq L$ una subvariedad lineal proyectiva. Si L' tiene unas ecuaciones implícitas:

$$(x_0, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} b_{10} & \ldots & b_{s0} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \ldots & b_{sn} \end{pmatrix} = (0, \ldots, 0)$$

en $\mathbb{P}_n$, sustituyendo la fórmula de la nota 1.2.8, queda

$$(y_0, \ldots, y_r) \begin{pmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{10} & \ldots & b_{s0} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \ldots & b_{sn} \end{pmatrix} = (0, \ldots, 0)$$

que son unas ecuaciones implícitas de L' respecto de $\mathcal{R}$, es decir expresan las condiciones que deben verificar las coordenadas de un punto de L (respecto de $\mathcal{R}$) para pertenecer a L'.
Un razonamiento análogo se puede construir para obtener unas ecuaciones paramétricas de L' respecto de $\mathcal{R}$.

1.3 Dualidad.

Si representamos mediante un grafo el retículo de $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)$, en el que cada variedad lineal proyectiva es un vértice y la relación de contenido determina las aristas, encontraremos una propiedad de simetría del grafo. Esta simetría es la traducción de la dualidad en el espacio proyectivo.
Definición 1.3.1.– Dado el espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$, notemos $\mathbb{P}_n(k)^*$ al conjunto de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}_n(k)$. Cada elemento de $\mathbb{P}_n(k)^*$ es pues un hiperplano de $\mathbb{P}_n(k)$ y tendrá, por tanto, una ecuación implícita de la forma

$$a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

donde no todos los coeficientes a_i son nulos. Evidentemente dicha ecuación no es única, pero la diferencia entre dos ecuaciones implícitas de un mismo hiperplano de $\mathbb{P}_n(k)$ sólo puede estar en la multiplicación por un escalar no nulo. Por tanto, a cada hiperplano de $\mathbb{P}_n(k)$ de ecuación $a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$ le podemos asociar el punto $(a_0 : \cdots : a_n)$ de $\mathbb{P}_n(k)$, estableciendo así una biyección

$$\Phi : \mathbb{P}_n(k)^* \simeq \mathbb{P}_n(k)$$

que nos permitirá tratar a $\mathbb{P}_n(k)^*$ también como otro espacio proyectivo, que llamaremos *espacio proyectivo dual de* $\mathbb{P}_n(k)$.

A continuación estudiamos la estructura de las variedades lineales proyectivas en el espacio proyectivo dual.
Proposición 1.3.2.– Sean $H, H_1, \ldots, H_s$ puntos de $\mathbb{P}_n(k)^*$. Se verifica:

1. $\{H_1,\ldots,H_s\}$ son puntos linealmente dependientes (resp. l.i.) en $\mathbb{P}_n(k)^*$ si y sólo si $\dim H_1\cap\cdots\cap H_s > n-s$ (resp. $\dim H_1\cap\cdots\cap H_s = n-s$) en $\mathbb{P}_n(k)$.

2. $H\in L_p(H_1,\ldots,H_s)$ en $\mathbb{P}_n(k)^*$ si y sólo si $H\supseteq H_1\cap\cdots\cap H_s$ en $\mathbb{P}_n(k)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que los hiperplanos H y H_i, $i=1,\ldots,s$ están dados por ecuaciones $b_0x_0+\cdots+b_nx_n=0$, $b_{i0}x_0+\cdots+b_{in}x_n=0$, respectivamente. Para demostrar 1 basta ver que ambas condiciones equivalen a que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} b_{10} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s0} & \ldots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

es menor que s. Para la condición 2 basta ver que las condiciones equivalen a que el rango de la matriz anterior coincide con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} b_0 & \ldots & b_n \\ b_{10} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s0} & \ldots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

□

Definición 1.3.3.– Dada una variedad lineal proyectiva $L\subseteq\mathbb{P}_n(k)$ definimos su *dual*, que notamos $\star(L)$, como el subconjunto de $\mathbb{P}_n(k)^*$ formado por los hiperplanos de $\mathbb{P}_n(k)$ que contienen a L, i.e.

$$\star(L) := \{H\in\mathbb{P}_n(k)^* \mid L\subseteq H\}.$$

Análogamente, si $M\subseteq\mathbb{P}_n(k)^*$ es una variedad lineal proyectiva, definimos su *dual*, que notaremos $\star'(M)$, como la intersección de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}_n(k)$ que son elementos de M, i.e.

$$\star'(M) := \bigcap_{H\in M} H.$$

Nota 1.3.4.– Es evidente que $\star'$ es una aplicación bien definida, porque la intersección de variedades es una variedad. Para verificar que $\star$ está bien definida, basta expresar cada variedad lineal proyectiva L de $\mathbb{P}_n$ por sus ecuaciones implícitas, es decir como intersección de hiperplanos $L=H_1\cap\cdots\cap H_s$, entonces por la proposición 1.3.2, $\star(L)=L_p(H_1,\ldots,H_s)$ en $\mathbb{P}_n(k)^*$.

Resumimos en la siguiente proposición las propiedades más importantes de $\star$ y $\star'$.

Proposición 1.3.5.– Las aplicaciones $\star$ y $\star'$ son anti-isomorfismos entre los retículos de $\mathbb{P}_n(k)$ y de $\mathbb{P}_n(k)^*$, uno el inverso del otro. Más concretamente, para cada $L\in R(\mathbb{P}_n)$ y $M\in R(\mathbb{P}_n^*)$:

1. $\star$ y $\star'$ invierten las inclusiones.

2. $\dim\star(L)=n-\dim L-1$ y $\dim\star'(M)=n-\dim M-1$.

3. $\star\star'(M)=M$ y $\star'\star(L)=L$.

4. $\star(L_1+L_2)=\star(L_1)\cap\star(L_2)$ y $\star(L_1\cap L_2)=\star(L_1)+\star(L_2)$

5. $\star'(M_1+M_2)=\star'(M_1)\cap\star'(M_2)$ y $\star'(M_1\cap M_2)=\star'(M_1)+\star'(M_2)$

A la vista de la similitud de propiedades de $\star'$ y $\star$, a partir de ahora, las notaremos a ambas como $\star$, siempre que no haya confusión.

DEMOSTRACIÓN:
1. Trivial
2. Sea $L=H_1\cap\cdots\cap H_s$ con $\dim L=n-s$, es decir $\{H_1,\ldots,H_s\}$ son linealmente independientes, por la proposición 1.3.2. Por tanto $\star(L)=L_p(H_1,\ldots,H_s)$ tiene una base con s elementos, luego $\dim\star(L)=s-1=n-\dim L-1$.

Sea ahora $M=L_p(H_1,\ldots,H_s)$ con $\dim M=s-1$. Entonces

$$\star'(M)=\bigcap_{H\in M}H=\bigcap_{i=1}^{s}H_i,$$

por la proposición 1.3.2. Luego $\dim\star'(M)=n-s=n-\dim M-1$.

3.
$$\star' \star (L) = \star'\{H | H \supseteq L\} = \bigcap_{H \supseteq L} H = L$$

Por otra parte
$$\star \star' (M) = \star \left(\bigcap_{H \in M} H \right) = \{H_0 | H_0 \supseteq \bigcap_{H \in M} H\} \supseteq M,$$
y comparando las dimensiones se tiene la igualdad.

4. Si suponemos $L_1 = H_{11} \cap \cdots \cap H_{1s}$ y $L_2 = H_{21} \cap \ldots H_{2t}$ entonces

$$\star(L_1 \cap L_2) = \star(H_{11} \cap \cdots \cap H_{1s} \cap H_{11} \cap \cdots \cap H_{1s}) = L_p(H_{11}, \ldots, H_{2t}) = L_p(H_{11}, \ldots, H_{1s}) + L_p(H_{21}, \ldots, H_{2t}) = \star(L_1) + \star(L_2).$$

Por otra parte, como $\star$ invierte inclusiones: $\star(L_1 + L_2) \subseteq \star(L_1) \cap \star(L_2)$ El recíproco es trivial.

5. Por las propiedades 3 y 4:

$$\star'(M_1 + M_2) = \star'(\star(L_1) + \star(L_2)) = \star' \star (L_1 \cap L_2) = L_1 \cap L_2 = \star' \star (L_1) \cap \star' \star (L_2) = \star'(M_1) \cap \star'(M_2).$$

Análogamente se obtiene la otra igualdad. □

Obsérvese que la dualidad permite identificar los retículos: $\star(H) = \{H\}$ (si H es un hiperplano de $\mathbb{P}_n$) y $\star'(P) = P$ (si P es un punto de $\mathbb{P}_n$), pero invirtiendo los puntos de vista: un punto de $\mathbb{P}_n^*$ es un hiperplano de $\mathbb{P}_n$ y recíprocamente.

Nota 1.3.6.– En $\mathbb{P}_2$ el dual de un punto es una recta de $\mathbb{P}_2^*$. Concretamente, si P es un punto de $\mathbb{P}_2$, $\star(P)$ es el haz de rectas que pasa por P, que tiene estructura de recta proyectiva de $\mathbb{P}_2^*$.

Nota 1.3.7.– En el caso de dimensión 1 se da una circunstancia especial. Las aplicaciones $\star$ son, también, isomorfismos. Además componiéndolas con la aplicación Φ^{-1} del comienzo de esta sección, se obtiene una aplicación: $\star\Phi^{-1} : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ dada por las ecuaciones $(x_0', x_1') = (x_1, -x_0)$.

Nota 1.3.8.– Dado un resultado $\mathcal{T}$ relativo al retículo de variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}_n$, se puede enunciar su resultado *dual* $\mathcal{T}^*$ en $\mathbb{P}_n$, obtenido del resultado anterior, permutando las operaciones $+$ y $\cap$ e invirtiendo las inclusiones. Con ello se puede formular el denominado **Principio de Dualidad** de la Geometría Proyectiva:
Un teorema $\mathcal{T}$ relativo al retículo de variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}_n$ es cierto si y sólo si lo es su teorema dual $\mathcal{T}^*$.
La justificación de este principio está en la proposición anterior. En efecto, si $\mathcal{T}$ es válido en todo espacio proyectivo de dimensión n, lo será en $\mathbb{P}_n^*$. Bastaría ahora aplicar el anti-isomorfismo $\star$ para obtener $\mathcal{T}^*$ en $\mathbb{P}_n$.

Ejemplo 1.3.9.– Consideremos el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(k)$. Un resultado elemental es $\mathcal{T}$: *Dados dos puntos distintos existe una única recta que los contiene.* El teorema dual sería $\mathcal{T}^*$: *Dadas dos rectas distintas existe un único punto que está en ambas.* Aquí el espacio ambiente es fundamental: si $\mathcal{T}$ lo consideramos en $\mathbb{P}_3$, en donde también es cierto, su dual será ahora $\mathcal{T}^*$: *Dados dos planos distintos, existe una única recta que está en ambos.*