# Tema 2.- Homografías. Ecuaciones. Ejemplos.

En este tema estudiaremos los "isomorfismos" de los espacios proyectivos, que llamaremos homografías, daremos sus ecuaciones, algunos ejemplos y su clasificación. Siguiendo la filosofía iniciada en el tema anterior se trata simplemente de traducir, vía $\pi$, los objetos análogos del espacio vectorial, es decir, los isomorfismos entre espacios vectoriales y sus propiedades.

## 2.1 Homografías.

Sean $L_1 \subseteq \mathbb{P}_n(k)$ y $L_2 \subseteq \mathbb{P}_m(k)$ variedades lineales proyectivas no vacías de la misma dimensión $r$.
**Definición 2.1.1.–** Una aplicación $F : L_1 \to L_2$ se llama *homografía entre* $L_1$ *y* $L_2$ si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : \overline{\pi}^{-1}(L_1) \to \overline{\pi}^{-1}(L_2)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{F} & L_2 \\ {\scriptstyle\pi}\big\uparrow & & {\scriptstyle\pi}\big\uparrow \\ \overline{\pi}^{-1}(L_1) & \xrightarrow{f} & \overline{\pi}^{-1}(L_2), \end{array}$$

es decir, $F\pi(\mathbf{v}) = \pi f(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. En este caso usaremos la notación $F = \pi(f)$

Análogamente al caso de los puntos, el isomorfismo vectorial define unívocamente la homografía, salvo factor escalar.
**Proposición 2.1.2.–** Sean $f, g$ isomorfismos entre $\overline{\pi}^{-1}(L_1)$ y $\overline{\pi}^{-1}(L_2)$. Se verifica que $\pi(f) = \pi(g)$ si y sólo si existe un $\lambda \neq 0$ tal que $f = \lambda g$.

Demostración: Supongamos que $\pi(f) = \pi(g)$. Para cada vector $\mathbf{v}$, se tiene, por la conmutatividad anterior, que

$$\pi f(\mathbf{v}) = \pi(f)(\mathbf{v}) = \pi(g)(\mathbf{v}) = \pi g(\mathbf{v})$$

y, por tanto, que existe un $\lambda \neq 0$ tal que $f(\mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{v}))$. Si $r > 1$ hay que demostrar que el parámetro $\lambda$ es el mismo para todos los vectores. En efecto, sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores linealmente independientes (el otro caso sería trivial), y $\lambda$, $\mu$ y $\delta$ tales que $f(\mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{v})$, $f(\mathbf{w}) = \mu g(\mathbf{w})$ y $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \delta g(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Por tanto:

$$g(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda g(\mathbf{v}) + \mu g(\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = g(\delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{w}),$$

por ser $g$ inyectiva, $\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = \delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{w}$, y por la independencia lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, se obtiene lo deseado.

La implicación contraria es muy simple. □

## 2.2 Ecuaciones de las homografías.

Sean $L_1 \subseteq \mathbb{P}_n(k)$ y $L_2 \subseteq \mathbb{P}_m(k)$ variedades lineales proyectivas no vacías de la misma dimensión $r$. Sea $F = \pi(f)$ una homografía entre $L_1$ y $L_2$. Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ sistemas de referencia en $L_1$ y $L_2$ respectivamente. Si $P$ es un punto genérico de $L_1$, de coordenadas $(x_0 : \cdots : x_r)$, respecto de $\mathcal{R}_1$ y $(x'_0 : \cdots : x'_r)$ son las coordenadas de $F(P)$, respecto de $\mathcal{R}_2$, se trata de encontrar una relación entre ambas coordenadas.

Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases normalizadas asociadas a $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ respectivamente, y sea $M$ la matriz del isomorfismo $f$ respecto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$ son los vectores de coordenadas $(x_0, \ldots, x_r)$ y $(x'_0, \ldots, x'_r)$ respecto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente, se tiene que $F(P) = \pi(f)\pi(\mathbf{v}) = \pi f(\mathbf{v}) = \pi(\mathbf{v}')$, por tanto, existe un $\lambda \neq 0$ tal que

$$\lambda(x'_0, \ldots, x'_r) = (x_0, \ldots, x_r)M.$$

A estas ecuaciones las llamaremos *ecuaciones de* $F$ *respecto de* $\mathcal{R}_1$ *y* $\mathcal{R}_2$, que también las escribiremos de la manera siguiente:

$$(x'_0 : \cdots : x'_r) = (x_0 : \cdots : x_r)[M],$$

entendiendo por $[M]$ la clase-matriz de $M$, clase de equivalencia de la matriz $M$ respecto de la relación: $M \sim N$ si y sólo si existe un $\lambda \neq 0$ tal que $M = \lambda N$.

Nótese que en la definición anterior la clase $[M]$ es única, no depende de las elecciones hechas de bases normalizadas, de $f$ y de vectores en los puntos, dependiendo sólo de $F$, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

Al conjunto cociente de $\mathrm{Gl}(r+1, k)$ por la relación de equivalencia anterior se le notará por $\mathrm{PGl}(r, k)$, que hereda la estructura de grupo multiplicativo, llamado *grupo general lineal proyectivo*.
**Nota 2.2.1.–** Es inmediato verificar el efecto producido en la clase $[M]$ cuando se cambia de sistema de referencia en $L_1$ y $L_2$. Por analogía a lo que sucede en Álgebra Lineal cuando se cambia de base, la clase-matriz en nuevos sistemas

de referencia $\mathcal{R}'_1$ y $\mathcal{R}'_2$ sería $[AMB^{-1}]$, con $A$ y $B$ matrices invertibles. En el caso particular de $L_1 = L_2$, $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}'_2$, entonces la nueva clase-matriz es $[AMA^{-1}]$, es decir la clase de una matriz semejante a la de partida.

En el caso vectorial se sabía que para conocer un homomorfismo era necesario conocer las imágenes de los elementos de una base. Veremos ahora que para conocer una homografía se necesita conocer la imagen de los elementos de un sistema de referencia.

**Proposición 2.2.2.–** Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ sistemas de referencia en $L_1$ y $L_2$ respectivamente. Existe una única homografía que transforma $\mathcal{R}_1$ en $\mathcal{R}_2$ (ordenadamente).

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_r\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}'_0, \dots, \mathbf{v}'_r\}$ bases normalizadas asociadas a $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ respectivamente, existe un único isomorfismo vectorial $f$ tal que $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}'_i$, para cada $i = 0, \dots, r$. Se comprueba fácilmente que $F = \pi(f)$ verifica las condiciones del enunciado: $F\pi(\mathbf{v}_i) = \pi f(\mathbf{v}_i) = \pi(\mathbf{v}'_i)$, para cada $i = 0, \dots, r$, y $F\pi(\mathbf{v}_0 + \cdots + \mathbf{v}_r) = \pi(\mathbf{v}'_0 + \cdots + \mathbf{v}'_r)$.

Para probar la unicidad, sea otra homografía $G = \pi(g)$ que lleva $\mathcal{R}_1$ en $\mathcal{R}_2$, ordenadamente. Entonces $G\pi(\mathbf{v}_i) = \pi g(\mathbf{v}_i) = \pi(\mathbf{v}'_i)$, luego $g(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}'_i$, para cada $i = 0, \dots, r$. Por otra parte,

$$G\pi(\mathbf{v}_0 + \cdots + \mathbf{v}_r) = \pi(\lambda_0 \mathbf{v}'_0 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}'_r) = \pi(\mathbf{v}'_0 + \cdots + \mathbf{v}'_r),$$

luego existe un $\mu \neq 0$ tal que $\lambda_0 \mathbf{v}'_0 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}'_r = \mu(\mathbf{v}'_0 + \cdots + \mathbf{v}'_r)$, así $\lambda_0 = \cdots = \lambda_r = \mu$ y $g = \mu f$, con lo que $G = F$. □

**Proposición 2.2.3.–** Toda homografía $F : L_1 \to L_2$ induce un isomorfismo de los retículos de $L_1$ y $L_2$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que $F$ conmuta con el operador $L_p$: para cada subconjunto $E$ de vectores,

$$FL_p\overline{\pi}(E) = F\overline{\pi}L_v(E) = \overline{\pi}fL_v(E) = \overline{\pi}L_v(f(E)) = L_p\overline{\pi}f(E) = L_pF\overline{\pi}(E)$$

El resto de la demostración ya es muy fácil. □

Esta proposición permite obtener métodos de cálculo de ecuaciones de las imágenes directas e inversas de una variedad lineal proyectiva por una homografía.

El teorema de Staudt de la Geometría proyectiva es una especie de recíproco de la anterior proposición, pero que por su extensión no lo abordaremos.

## 2.3 Ejemplos.

**Ejemplo 2.3.1.–** La identidad es una homografía de una variedad lineal proyectiva en sí misma.

**Ejemplo 2.3.2.–** La composición de homografías es una homografía. Más precisamente, sean $L_1$, $L_2$ y $L_3$ variedades lineales proyectivas de la misma dimensión y $F : L_1 \to L_2$ y $G : L_2 \to L_3$, homografías. Si $F = \pi(f)$ y $G = \pi(g)$, entonces

$$GF(\pi(\mathbf{v})) = G(\pi f(\mathbf{v})) = \pi g f(\mathbf{v}),$$

es decir $GF$ es la homografía definida por el isomorfismo vectorial $gf$. Así mismo, si $[M_1]$ y $[M_2]$ son las clases-matrices de $F$ y $G$ respecto de sistemas de referencia fijados, entonces $[M_1M_2]$ es la clase-matriz de $GF$. (¡Atención al orden!)

**Ejemplo 2.3.3.–** Es un ejercicio muy simple comprobar que toda homografía es una aplicación biyectiva. Pues bien, si $F$ es una homografía también lo es $F^{-1}$, y además, $F^{-1} = \pi(f^{-1})$. De aquí se deduce que si $[M]$ es la clase-matriz de $F$ respecto de sistemas de referencia fijados, entonces $[M^{-1}]$ es la clase-matriz de $F^{-1}$.

De los ejemplos anteriores se deduce que, si $L$ es una variedad lineal proyectiva no vacía de dimensión $r$ y denotamos por $\mathrm{PGl}(L)$ al conjunto de homografías de $L$ en sí misma, entonces se tiene una estructura de grupo para la composición, isomorfo a $\mathrm{PGl}(r, k)$.

**Ejemplo 2.3.4.–** SECCIONES. Recordamos que en el plano proyectivo, el haz de rectas que pasa por un punto $O \in \mathbb{P}_2$ tiene estructura de recta proyectiva de $\mathbb{P}_2^*$, puesto que $\star(O)$ es una variedad lineal proyectiva de dimensión 1. Un ejemplo básico de homografía entre este haz de rectas que pasa por $O$ y una recta $L \subseteq \mathbb{P}_2$ que no pasa por $O$ es la sección de aquellas con ésta. En efecto, sea $F : \star(O) \to L$ definida por $F(H) = H \cap L$ para cada recta $H$ que pasa por $O$. Para probar que $F$ es una homografía utilizaremos un método habitual en geometría: elegir un sistema de referencia *ad hoc*, en donde los datos de partida tenga coordenadas y ecuaciones lo más simples posibles.
Sea $\mathcal{R} = \{O, P_1, P_2; U\}$ un sistema de referencia en $\mathbb{P}_2$, con $\{P_1, P_2\} \subseteq L$. Se tiene entonces que $\mathcal{R}_1 = \{OP_1, OP_2; OU\}$ es un sistema de referencia en $\star(O)$, ya que está formado por tres rectas distintas que pasan por $O$. De otra parte se tiene que $\mathcal{R}_2 = \{P_1, P_2; OU \cap L\}$ es también un sistema de referencia de $L$, por estar formado por tres puntos distintos. Sea $H$ una recta cualquiera que pasa por $O$, su ecuación respecto de $\mathcal{R}$ será $ax_1 + bx_2 = 0$. Como la estructura proyectiva de $\mathbb{P}_2^*$ es la dada por la aplicación $\Phi$ del tema anterior, se tiene que las coordenadas de $H$ respecto de $\mathcal{R}_1$

son $(b : -a)$. Por otro lado $F(H) = H \cap L$ tiene las mismas coordenadas respecto de $\mathcal{R}_2$. Por tanto el isomorfismo de matriz identidad, en la bases normalizadas correspondientes a $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, define a $F$.

**Ejemplo 2.3.5.–** PROYECCIONES. Consideremos ahora la aplicación inversa de la anterior $G : L \to \star(O)$ que asocia a cada punto $P$ de $L$ la recta $OP$. Es claro que $G$ es también una homografía.

**Ejemplo 2.3.6.–** La restricción de una homografía a una subvariedad lineal proyectiva es también una homografía, evidentemente. Un caso muy interesante lo veremos en el parágrafo siguiente (cf. nota 2.4.4).

## 2.4 Elementos invariantes por las homografías.

En el tema siguiente abordaremos el problema general de la clasificación de homografías en el grupo $\mathrm{PGl}(L)$, siendo $L$ una variedad lineal proyectiva no vacía de dimensión $r$ de $\mathbb{P}_n(k)$. Un instrumento útil en este problema es el estudio de variedades lineales proyectivas de $L$ dobles o invariantes por una homografía.

**Definición 2.4.1.–** Sea $F \in \mathrm{PGl}(L)$ una homografía y $L' \subseteq L$ una variedad lineal proyectiva. Se dice que $L'$ es invariante o doble para $F$ si $F(L') = L'$.

Nosotros sólo analizaremos el caso de puntos e hiperplanos.

**Proposición 2.4.2.–** *(Cálculo de los puntos dobles de las homografías)* Sea $F : L \to L$ una homografía y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de $L$. Sea $[A]$ la clase-matriz de las ecuaciones de $F$ respecto de $\mathcal{R}$ y sea $P$ un punto de $L$ de coordenadas $(x_0 : \cdots : x_r)$ respecto de $\mathcal{R}$. Las propiedades siguientes son equivalentes:

a) $P$ es un punto doble de $F$.

b) $\lambda(x_0, \ldots, x_r) = (x_0, \ldots, x_r)A$ para algún autovalor $\lambda$ de la matriz $A$.

DEMOSTRACIÓN: Trivial □

**Proposición 2.4.3.–** *(Cálculo de los hiperplanos dobles de una homografía)* Sean $F : L \to L$ una homografía, $H \subset L$ un hiperplano de $L$ y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de $L$. Supongamos que $[A]$ es la clase-matriz de $F$ respecto de $\mathcal{R}$ y que $a_0x_0 + \cdots + a_rx_r = 0$ es la ecuación implícita de $H$ respecto de $\mathcal{R}$. Las propiedades siguientes son equivalentes:

a) $H$ es un hiperplano doble de $F$.

b) $A(a_0, \ldots, a_n)^t = \lambda(a_0, \ldots, a_n)^t$ para algún autovalor $\lambda$ de $A$.

DEMOSTRACIÓN: En este caso lo más simple es observar que si $a_0x'_0 + \cdots + a_rx'_r = (a_0 \ldots a_r)(x'_0 \ldots x'_r)^t = 0$ es la ecuación implícita de $H$ respecto de $\mathcal{R}$, entonces la ecuación de $F^{-1}(H)$ es

$$(a_0 \ldots a_r)A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0.$$

El resto ya es elemental. □

**Nota 2.4.4.–** Sea $F : L \to L$ una homografía, $H \subset L$ un hiperplano de $L$ doble para $F$, de ecuación $x_0 = 0$ en cierto sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $L$. Sea $[M]$ la clase-matriz de $F$ respecto de $\mathcal{R}$. Por la proposición 2.4.3 se tiene que

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_0 & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Si adoptamos en $H$ el sistema de referencia del ejemplo 1.2.9, entonces $F_{|H} : H \to H$ es una homografía de clase-matriz $[M_0]$.