Tema 3.- El grupo lineal proyectivo. Homologías. Afinidades.

3.1 El grupo lineal proyectivo.

Recordamos que en el tema anterior hemos definido, para una variedad lineal proyectiva $L \subseteq \mathbb{P}_n$ no vacía, el grupo lineal proyectivo $\mathrm{PGl}(L)$ (cf 2.3.2 y 2.3.3). Además, si $V = \overline{\pi}^{-1}(L)$, se obtenía allí un homomorfismo de grupos $\pi : \mathrm{Gl}(V) \to \mathrm{PGl}(L)$ sobreyectivo.

Se trata aquí de trasladar, vía π, la clasificación en el grupo $\mathrm{Gl}(V)$ estudiada en Álgebra Lineal . Se recuerda que dos automorfismos f y g de V se dicen linealmente equivalentes, si existe un $h \in \mathrm{Gl}(V)$ tal que $f = hgh^{-1}$.

Definición 3.1.1.– Dos homografías F y G de $\mathrm{PGl}(L)$ se dicen proyectivamente equivalentes, si existe una homografía $H \in \mathrm{PGl}(L)$ tal que $F = HGH^{-1}$.

Al igual que en el caso lineal, la equivalencia proyectiva se puede traducir a una condición matricial, siempre que se fije un sistema de referencia en L. Recordemos para ello el Teorema de Jordan

Teorema 3.1.2.– *Teorema de clasificación de Jordan.* Supongamos que el cuerpo k es algebraicamente cerrado, y sean f y g dos automorfismos de un espacio vectorial V sobre k. Sean A y B las matrices de f y g respecto de una base $\mathcal{B}$ fijada de V. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1) f y g son linealmente equivalentes.

1') A y B son semejantes, *i.e.* existe una matriz regular C tal que $A = CBC^{-1}$.

2) A y B tienen los mismos autovalores y la misma partición de multiplicidades.

2') A y B tienen una misma forma canónica de Jordan.

Teorema 3.1.3.– *(Clasificación de las homografías: versión proyectiva del teorema de Jordan)* Supongamos que el cuerpo k es algebraicamente cerrado y sean $F, G \in \mathrm{PGl}(L)$ dos homografías. Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de L y sean $[A]$ y $[B]$ las clases-matrices de F y G respecto de $\mathcal{R}$. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1) F y G son proyectivamente equivalentes.

1') A y B son semejantes, salvo un escalar, *i.e.*, existen $\lambda \in k$ no nulo y una matriz regular C tal que $\lambda A = CBC^{-1}$.

2) Los autovalores de A y B se distinguen por un factor multiplicativo no nulo de k, y poseen las mismas multiplicidades y las mismas particiones de multiplicidades, i.e. existe un escalar no nulo λ tal que μ es un autovalor de A con partición de multiplicidad $m = p_1 + \cdots + p_t$ si y sólo si $\lambda\mu$ es un autovalor de B con partición de multiplicidad $m = p_1 + \cdots + p_t$.

La demostración es una consecuencia inmediata del teorema de Jordan y de los resultados del tema anterior.

Nota 3.1.4.– El teorema anterior es también cierto en el caso en que el cuerpo k sea infinito y no necesariamente algebraicamente cerrado. Para ello basta observar que la relación de conjugación sobre una clausura algebraica de k implica la relación de conjugación sobre k. Esto se aplica muy especialmente al caso $k = \mathbb{Q}$ o $k = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1.5.– *(Clasificación de las homografías de una recta proyectiva real o compleja)* Supongamos que $k = \mathbb{C}$ y que L es una recta proyectiva compleja. Sea $F \in \mathrm{PGl}(L)$ una homografía distinta de la identidad. Entonces se verifica uno (y sólo uno) de los asertos siguientes:

1) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; U\}$ tal que la clase-matriz de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
con $\lambda \neq 0, 1$. En este caso F posee sólo dos puntos dobles P_0, P_1. A estas homografías las llamaremos *hiperbólicas.* Además, si $G \in \mathrm{PGl}(L)$ es otra homografía en las mismas condiciones, i.e. existe un sistema de referencia $\mathcal{S} = \{Q_0, Q_1; V\}$ tal que la clase-matriz de G respecto de él es la clase de una matriz de la forma:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$
F es proyectivamente equivalente a G si y sólo si $\lambda = \mu$.

2) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; U\}$ tal que la clase-matriz de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
En este caso F posee sólo un punto doble P_0. A estas homografías las llamaremos *parabólicas.* Además, si $G \in \mathrm{PGl}(L)$ es otra homografía en las mismas condiciones, G es proyectivamente equivalente a F.

Si el cuerpo k es el de los números reales, además de los tipos 1) y 2) debemos añadir el siguiente:

3) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; U\}$ tal que la clase-matriz de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

con $\beta \neq 0$. En este caso F no posee ningún punto doble. A estas homografías las llamaremos *elípticas*. Además, si $G \in \mathrm{PGl}(L)$ es otra homografía en las mismas condiciones, i.e. existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{Q_0, Q_1; V\}$ tal que la clase-matriz de G respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ -\beta' & 1 \end{pmatrix},$$

con $\beta' \neq 0$, F es proyectivamente equivalente a G si y sólo si $\beta' = \beta$.

Ejemplo 3.1.6.– *(Clasificación de las homografías del plano proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado)* Supongamos que k es algebraicamente cerrado y que L es una variedad proyectiva de dimensión dos. Sea $F \in \mathrm{PGl}(L)$ una homografía distinta de la identidad. Entonces se verifica uno (y sólo uno) de los asertos siguientes:

1) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; U\}$ tal que la matriz-clase de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso la configuración invariante de F está formada por una recta de puntos dobles $(P_1 + P_2)$ y por un haz de rectas dobles (las que pasan por P_1). Nótese que P_1 es un punto doble "especial" dentro de la recta de puntos dobles y que $P_1 + P_2$ es también una recta doble "especial" dentro del haz de rectas dobles. Además, si G es otra homografía de L en las mismas condiciones, entonces G es proyectivamente equivalente a F.

2) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; U\}$ tal que la matriz-clase de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso la configuración invariante de F está formada por un solo punto doble (P_2) y una sola recta doble $(P_1 + P_2 = \{x_0 = 0\})$. Además, si G es otra homografía de L en las mismas condiciones, entonces G es proyectivamente equivalente a F.

3) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; U\}$ tal que la matriz-clase de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

con $\lambda \neq 0, 1$. En este caso la configuración invariante de F está formada por una recta de puntos dobles $(P_1 + P_2)$, otro punto doble más (P_0), un haz de rectas dobles (las que pasan por P_0) y una recta doble más $(P_1 + P_2 = \{x_0 = 0\})$. Además, si G es otra homografía de L en las mismas condiciones, i.e. existe un sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{P_0', P_1', P_2'; U'\}$ tal que la matriz-clase de G respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix},$$

con $\lambda' \neq 0, 1$, entonces G es proyectivamente equivalente a F si y sólo si $\lambda = \lambda'$. A este número λ se le llama *razón* de la homología F. Nótese que se puede definir como cociente del autovalor doble por el autovalor simple, por lo que sólo depende de F.

4) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; U\}$ tal que la matriz-clase de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\lambda \neq 0, 1$. En este caso la configuración invariante de F está formada por dos puntos dobles (P_0 y P_2) y dos rectas dobles, la determinada por los dos puntos dobles ($P_0 + P_2 = \{x_1 = 0\}$) y otra que pasa sólo por uno de ellos ($P_1 + P_2 = \{x_0 = 0\}$). Además, si G es otra homografía de L en las mismas condiciones, i.e. existe un sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{P_0', P_1', P_2'; U'\}$ tal que la matriz-clase de G respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\lambda' \neq 0, 1$, entonces G es proyectivamente equivalente a F si y sólo si $\lambda = \lambda'$. Nótese que en este caso los dos puntos dobles no juegan el mismo papel geométricamente hablando, pues por uno de ellos pasa una sola recta doble mientras que por el otro pasan dos rectas dobles. Esta es la contrapartida geométrica del hecho algebraico de que los puntos dobles provienen de dos autovalores con distinta partición de multiplicidades. Uno de ellos aparece en un bloque de Jordan 2×2 mientras que el otro lo hace en un bloque de Jordan 1×1.

5) Existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; U\}$ tal que la matriz-clase de F respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

con $\lambda \neq 0, 1$, $\mu \neq 0, 1$ y $\lambda \neq \mu$. En este caso la configuración invariante de F está formada por tres puntos no alineados (P_0, P_1 y P_2) y por las tres rectas que determinan ($\{x_0 = 0\}, \{x_1 = 0\}$ y $\{x_2 = 0\}$), que son no concurrentes. Además, si G es otra homografía de L en las mismas condiciones, i.e. existe un sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{P_0', P_1', P_2'; U'\}$ tal que la matriz-clase de G respecto de él es la clase de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \mu' \end{pmatrix},$$

con $\lambda' \neq 0, 1$, $\mu' \neq 0, 1$ y $\lambda' \neq \mu'$, entonces G es proyectivamente equivalente a F si y sólo si $\{\lambda, \mu\} = \{\lambda', \mu'\}$.

En este ejemplo vemos cómo el simple examen "geométrico" de la configuración invariante determina el tipo "algebraico" de forma canónica.

3.2 Homologías planas.

Las homografías de $\mathbb{P}_2$ de los tipos 1) y 3) del ejemplo 3.1.6 tienen en común el tener una recta de puntos dobles; por esa razón se las llamará *homologías* de $\mathbb{P}_2$. A la recta de puntos dobles se llamará *eje* de la homología. De hecho son las únicas homografías que tienen 3 puntos dobles alineados. Las homologías, por dualidad, tienen un haz de rectas dobles, que pasan por un punto, llamado *centro* de la homología. De hecho son las únicas homografías que tienen tres rectas dobles concurrentes. Las homologías del tipo 1) se llaman homologías *de centro y eje incidentes* (o *elaciones*, o *especiales*, en otros autores). Las del tipo 3) se llaman homologías *de centro y eje no incidentes* (o *generales*, en otros autores). Veremos en esta sección algunas propiedades de las homologías planas.

Proposición 3.2.1.– Sea F una homología plana de centro O y eje e.

1. Si P es un punto no doble para F, entonces $\{O, P, F(P)\}$ están alineados.
2. Si r es una recta no doble para F, entonces $\{e, r, F(r)\}$ son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN: Para el primer caso basta ver que OP es una recta doble, por pasar por O, luego $F(P) \in OP$. Para el otro caso, basta ver que $e \cap r$ es un punto doble, por ser de e, luego $e \cap r \in F(r)$. □

Proposición 3.2.2.– Una homología plana viene dada unívocamente por el centro O, el eje e, un punto no doble P y su imagen $F(P) \in OP$.

DEMOSTRACIÓN: En el caso no incidente, dados $O, e, P, F(P)$, con $O \notin e$, basta tomar dos puntos distintos $A, B \in e \setminus OP$. Entonces $\{O, A, B, P\}$ es un sistema de referencia, cuyos transformados son $\{O, A, B, F(P)\}$. Existe una única homografía F que hace las transformaciones citadas. Como A, B y $e \cap OP$ son tres puntos dobles distintos de e, F sólo puede ser una homología de centro O y eje e, que verifica las condiciones enunciadas.

En el caso incidente, $O \in e$, se un punto $Q \notin e \cup OP$. Por la proposición 3.2.1, la recta $r = PQ$ se transforma en $F(r)$, que pasa por $e \cap r$ y por $F(P)$. Como $F(Q) \in F(r) \cap OQ$, se obtiene así el punto $F(Q)$. Basta razonar ahora con la única homografía F que lleva $\{O, P, Q, A\}$, con $A \in e \setminus PQ$, $A \neq O$, en $\{O, F(P), F(Q), A\}$. Como F tiene las rectas dobles concurrentes OP, OQ y e, entonces es una homología de centro O y eje e, ya que e contiene 3 puntos dobles para F: O, A y $PQ \cap F(P)F(Q)$. □

Nota 3.2.3.– Como consecuencia de la proposición anterior y su demostración, se tiene un método geométrico de construcción de la imagen de un punto por una homología F, conocidos su centro O, eje e, un punto no doble P y su imagen $F(P)$.
Se trata, en el caso $Q \notin OP$ de repetir el procedimiento de la proposición anterior, sean O y e incidentes o no. Si $Q \in OP$, se haría el procedimiento anterior para un punto $P' \notin OP$, y se repetiría para los datos O, e, P' y $F(P')$ ya que, entonces, $Q \notin OP'$.

Ejercicio 1.– Una homología plana viene dada unívocamente por el centro O, el eje e, una recta no doble r y su imagen $F(r)$ pasando por $e \cap r$.

Ejercicio 2.– La composición de dos homologías planas del mismo centro (resp. eje) es, o bien una homología del mismo centro (resp. eje), o bien la identidad.

PARA AMPLIAR: LA SIGUIENTE SECCIÓN PRESENTA UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN ARBITRARIA

3.3 Homologías.

Sea $L \subset \mathbb{P}_n$ una variedad lineal proyectiva de dimensión $r \geq 2$.
Definición 3.3.1.– Sea $F : L \to L$ una homografía distinta de la identidad. Diremos que F es una *homología* si F posee un hiperplano de puntos dobles.

Lema 3.3.2.– Sea $F : L \to L$ una homografía con P y Q puntos dobles correspondientes a autovalores λ y μ de una cierta matriz A de F, respectivamente. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\lambda = \mu$.
2. En la recta PQ hay más de dos puntos dobles de F.
3. La recta PQ es de puntos dobles de F.

DEMOSTRACIÓN: Sean $P = \pi(\mathbf{x})$ y $Q = \pi(\mathbf{y})$ con $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{x}A$ y $\mu\mathbf{y} = \mathbf{y}A$.
$1 \Rightarrow 3$ y $3 \Rightarrow 2$ son triviales. Basta probar $2 \Rightarrow 1$. Sea $\delta \neq 0$ tal que el punto $\pi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{y})$ de PQ es doble para F, entonces

$$(\mathbf{x} + \delta\mathbf{y})A = \lambda\mathbf{x} + \mu\delta\mathbf{y} = \epsilon(\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}),$$

por tanto $\lambda = \mu$. □

Teorema 3.3.3.– Si F es una homología de L y H es un hiperplano de puntos dobles, entonces, a lo sumo, hay un punto doble más. A H se le llamará *eje de la homología* F. Además:

1. En el caso de que exista un punto doble más O, éste se llamará *centro* de la homología F, y serán dobles para F todas las variedades lineales proyectivas contenidas en H o que contengan a O.
2. En el caso de que no existan puntos dobles para F fuera de H, existe un punto $O \in H$ que se caracteriza por ser dobles para F todas las variedades lineales proyectivas que pasan por O, además de todas las contenidas en H. A este punto O se le llamará *centro* de esta homología.

En el primer caso se dice que F es una homología *de centro y eje no incidentes* y en el segundo caso se dice *de centro y eje incidentes*.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{P_1, \ldots, P_r\}$ una base de H. Se puede ampliar con un punto P_0 y un punto unidad U hasta un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de L. Por la nota 2.4.4, como $F_{|H}$ es la identidad, una matriz de F respecto de $\mathcal{R}$ será:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 & \ldots & \alpha_r \\ 0 & \mu & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu \end{pmatrix}.$$

Estudiamos las dos posibilidades: $\lambda \neq \mu$ y $\lambda = \mu$.
1. $\lambda \neq \mu$. Si calculamos los puntos dobles asociados a λ obtenemos un punto doble $O = (\lambda - \mu : \alpha_1 : \cdots : \alpha_r)$, con $O \notin H$ que tiene como ecuación $x_0 = 0$. Si $L' \subset H$, obviamente $F(L') = L'$. Si $O \in L'$, entonces $L' = O + (L' \cap H)$. Luego $F(L') = F(O) + F(L' \cap H) = L'$.

2. Si $\lambda = \mu$ no hay más puntos dobles que los de H. Si calculamos los hiperplanos dobles usando la proposición 2.4.3 para el único autovalor μ se ve que son dobles todos los hiperplanos que pasan por el punto $O = (0 : \alpha_1 : \cdots : \alpha_r) \in H$. Cualquier variedad que pase por O es intersección de un número finito de aquellos hiperplanos, luego es doble para F. □

Se puede generalizar la definición de razón doble de una homología de centro y ejes no incidentes, dada en el caso plano. Así, se llamaría *razón* de una tal homología F a la razón del autovalor múltiple de cualquier matriz de F por el simple. La proposición 3.2.2 y los ejercicios siguientes se pueden generalizar fácilmente a homologías en dimensiones superiores a 2.

Un resultado cuya demostración se escapa de nuestros objetivos es el siguiente

Ejercicio 3.– Las homologías generan el grupo $\mathrm{PGl}(L)$.

3.4 Relación entre las afinidades y las homografías.

En esta sección partimos de la inmersión $\varphi : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n(k)$ del espacio afín en el proyectivo, y estudiamos cómo se pueden interpretar las afinidades de k^n en términos de las homografías de $\mathbb{P}_n(k)$.

Proposición 3.4.1.– Sea $F : k^n \to k^n$ una afinidad. Existe una única homografía $\overline{F} : \mathbb{P}_n(k) \to \mathbb{P}_n(k)$ tal que $\varphi \circ F = \overline{F} \circ \varphi$. A dicha homografía la llamaremos homografía asociada a la afinidad F. Además, si $G\colon k^n \to k^n$ es otra afinidad, se tiene que $\overline{G \circ F} = \overline{G} \circ \overline{F}$, es decir la aplicación que lleva F en $\overline{F}$ es un homomorfismo entre los grupos afín $GA(n,k)$ y proyectivo $\mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n(k))$.

Demostración: Se recuerda que una afinidad F de k^n venía dada por una aplicación de la forma

$$(1, x'_1, \ldots, x'_n) = (1, x_1, \ldots, x_n)M,$$

donde M es una matriz de la forma

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_0 & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

y $|M| = |M_0| \neq 0$. La homografía $\overline{F}$ de $\mathbb{P}_n$ definida por las ecuaciones

$$(x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_n) = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n)[M],$$

verifica, trivialmente, las condiciones del enunciado. □

PARA AMPLIAR: EN LO QUE SIGUE SE ANALIZA LA RELACIÓN ENTRE AFINIDADES Y HOMOGRAFÍAS

Nota 3.4.2.– En las condiciones de la proposición anterior, se tiene lo siguiente:

1) La relación $\varphi \circ F = \overline{F} \circ \varphi$ nos indica que $\overline{F}$ extiende a F, pues podemos considerar a k^n incluido en $\mathbb{P}_n(k)$ a través de la aplicación φ, es decir que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}_n \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{F}}\downarrow \\ k^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}_n. \end{array}$$

2) El hiperplano del infinito H es doble para $\overline{F}$. Además se tiene que $\overline{F}(\pi_\infty(\mathbf{u})) = \pi_\infty(\vec{F}(\mathbf{u}))$ para cada vector $\mathbf{u} \in k^n - \{0\}$, o bien que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi_\infty} & H \\ {\scriptstyle \vec{F}}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{F}}\downarrow \\ V \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi_\infty} & H. \end{array}$$

Esto nos indica que la acción de $\overline{F}$ sobre los puntos "finitos", i.e. los del complementario de H, es idéntica a la acción de F sobre los puntos del espacio afín k^n, mientras que la acción de $\overline{F}$ sobre los puntos del infinito reproduce la acción de la aplicación vectorial $\vec{F}$ asociada a F sobre las direcciones del espacio afín k^n, definida por las ecuaciones (en la notación de la proposición anterior)

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1, \ldots, x_n)M_0.$$

3) La correspondencia $F \mapsto \overline{F}$ establece una biyección[1] entre las afinidades de k^n y las homografías de $\mathbb{P}_n(k)$ que tienen doble el hiperplano del infinito H.

Proposición 3.4.3.– Sea $F\colon k^n \to k^n$ una afinidad distinta de la identidad. Consideremos las propiedades siguientes:

a) F es una traslación de vector múltiplo no nulo de $(u_1, \ldots, u_n)$.

b) $\overline{F}$ es una homología de eje el hiperplano del infinito y de centro incidente $(0 : u_1 : \cdots : u_n)$.

c) F es una homotecia de centro $O \in k^n$.

d) $\overline{F}$ es una homología de eje el hiperplano del infinito y de centro no incidente $\varphi(O)$.

Entonces a) es equivalente a b) y c) es equivalente a d).

Demostración: Basta analizar las ecuaciones de las transformaciones citadas. □

[1]En realidad se trata de un isomorfismo de grupos.