Tema 4.- Razón doble. Homografías entre rectas proyectivas. Cuaternas armónicas.

En este tema vamos a estudiar el invariante fundamental de las homografías. En el espacio euclídeo el invariante fundamental de los movimientos es la distancia entre dos puntos, y en el espacio afín las afinidades dejan fija la razón simple de tres puntos alineados. De modo análogo, vamos a ver que las homografías entre rectas se caracterizan por dejar invariante la *razón doble* de cuatro puntos.

Se supondrá que k es un cuerpo de *característica* distinta de 2, es decir se verifica siempre que $1+1 \neq 0$, o bien $1 \neq -1$. Estamos excluyendo cuerpos del tipo de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$.

4.1 Razón doble.

Sea r una recta de un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$.
Definición 4.1.1.– Sean A, B, C, D puntos distintos de r y sea $\mathcal{S}$ el sistema de referencia $\{A, B; C\}$. Llamaremos razón doble de los puntos A, B, C, D al número

$$|ABCD| = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \in k,$$

donde $(\alpha_0 : \alpha_1)$ son las coordenadas de D respecto de $\mathcal{S}$.

Se deduce, de inmediato, que razón doble es distinta de 0 o 1. La siguiente proposición nos dará un método de cálculo de la razón doble más elemental que su propia definición.
Proposición 4.1.2.– Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia cualquiera de la recta proyectiva r y sean $A, B, C, D \in r$ cuatro puntos distintos, de coordenadas respecto de $\mathcal{R}$: $(a_0 : a_1)$, $(b_0 : b_1)$, $(c_0 : c_1)$ y $(d_0 : d_1)$ respectivamente. Se verifica que

$$|ABCD| = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}}.$$

Demostración: Supongamos que las ecuaciones del cambio del sistema de referencia $\mathcal{R}$ al $\mathcal{S}$ son

$$(x_0 : x_1) = (x_0' : x_1')[M].$$

Esto significa que $(a_0, a_1) = \lambda_1(1,0)M$, $(b_0, b_1) = \lambda_2(0,1)M$, $(c_0, c_1) = \lambda_3(1,1)M$ y $(d_0, d_1) = \lambda_4(\alpha_0, \alpha_1)M$. Para terminar basta sustituir lo anterior en la fórmula de la razón doble enunciada. □

Nota 4.1.3.– Obsérvese que la proposición anterior permite ampliar la definición de razón doble para cuatro puntos alineados A, B, C, D tales que $A \neq D$ y $B \neq C$. En ese caso, si $A = C$ o $B = D$, se tiene valor nulo para la razón doble, o si $C = D$ o $A = B$, se tiene valor 1 para ella.

La justificación del nombre adoptado de razón doble, viene dada por el siguiente resultado, en donde se comprueba que la razón doble es una razón de razones simples.
Proposición 4.1.4.– Sea $\varphi : k^n \to \mathbb{P}_n(k)$ la inmersión habitual del espacio afín en el proyectivo y sea L una recta afín cualquiera.

1. Sean $A, B, C \in L$ tres puntos distintos entre sí y L_∞ el punto del infinito de L. Entonces se tiene que la razón simple (CBA) coincide con la razón doble $|\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)L_\infty|$.

2. Sean ahora A, B, C, D cuatro puntos distintos de L. Se tiene

$$|\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)| = \frac{(CBA)}{(DBA)} = \frac{(BCD)}{(ACD)}.$$

Demostración: Sean $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$ y $D = (d_1, \dots, d_n)$.

1. Si $(CBA) = \lambda$ entonces $\vec{CA} = \lambda\, \vec{CB}$, por tanto, para cada $i = 1, \dots, n$, $a_i - c_i = \lambda(b_i - c_i)$, o bien $c_i = \frac{\lambda b_i - a_i}{\lambda - 1}$. Si fijamos en $\overline{L}$ el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{\varphi(A), \varphi(B); U\}$ con $U = (2 : a_1 + b_1 : \cdots : a_n + b_n)$, respecto de él se tiene que $\varphi(A) = (1:0)_\mathcal{R}$, $\varphi(B) = (0:1)_\mathcal{R}$, $\varphi(C) = (1 : -\lambda)_\mathcal{R}$, y $L_\infty = (1 : -1)_\mathcal{R}$. Aplicando la fórmula de la proposición anterior se tiene lo que se quería.

2. Haciendo lo propio con $\mu = (DBA)$, se tiene que $D = (1 : -\mu)$, y de nuevo la fórmula de la razón doble termina la demostración. Queda como ejercicio la última igualdad. □

Es interesante conocer los cambios producidos al conmutar los puntos en la razón doble.
Proposición 4.1.5.– Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos entre sí de una recta proyectiva r y supongamos que $|ABCD| = \mu$. Entonces se tiene:

1. $|ABCD| = |BADC| = |CDAB| = |DCBA| = \mu$
2. $|BACD| = |ABDC| = |DCAB| = |CDBA| = \mu^{-1}$
3. $|ACBD| = |DBCA| = |CADB| = |BDAC| = 1 - \mu$
4. $|CBAD| = |ADCB| = |DABC| = BCDA| = \frac{\mu}{\mu-1}$
5. $|ADBC| = |CBDA| = |BCAS| = |DACB| = 1 - \mu^{-1}$
6. $|DBAC| = |BDCA| = |CABD| = |ACDB| = \frac{1}{1-\mu}$

Demostración: Como el grupo de las permutaciones de 4 elementos está generado por las trasposiciones de 2 cualesquiera, para obtener todas las fórmulas enunciadas basta probar que $|BACD| = |ABDC| = \mu^{-1}$ y que $|ACBD| = 1 - \mu$. Las dos primeras se obtienen trivialmente de la proposición 4.1.2. Para la última se aplica la definición, es decir $D = (\mu : 1)$ respecto $\mathcal{S} = \{A, B; C\}$, y ahora la proposición citada para obtener $|ACBD|$. □

4.2 Homografías entre rectas proyectivas.

Vamos a probar, como dijimos antes, que las homografías se caracterizan por dejar invariante la razón doble.
Lema 4.2.1.– Sean A, B, C tres puntos de r distintos entre sí. La aplicación que a cada $D \in r - \{A\}$ le asocia el escalar $|ABCD| \in k$ es biyectiva. Además, $|ABCD| = 1$ si y sólo si $C = D$, y $|ABCD| = 0$ si y sólo si $D = B$.

Demostración: Es consecuencia trivial de la definición de razón doble, como $\mathcal{S} = \{A, B; C\}$ es un sistema de referencia en r, la aplicación definida es la que asocia a cada $D = (d : 1)_{\mathcal{S}}$ el número $d \in k$, es decir, es la aplicación inversa de una inmersión de la recta afín k en la recta proyectiva r. □

Teorema 4.2.2.– Sea $F : r \to r'$ una aplicación inyectiva entre dos rectas proyectivas. Las propiedades siguientes son equivalentes:

a) F es una homografía.

b) F conserva la razón doble.

Demostración: a)⇒b)
Sean los sistemas de referencia $\mathcal{S} = \{A, B; C\}$ en r y $\mathcal{S}' = \{F(A), F(B); F(C)\}$ en r'. Es obvio que la clase-matriz de F en los sistemas citados es la de la matriz unidad. Si $D = (\alpha_0 : \alpha_1)_{\mathcal{S}}$, entonces $F(D) = (\alpha_0 : \alpha_1)'_{\mathcal{S}}$. El resto es consecuencia de la definición de razón doble.
b)⇒a) Eligiendo los mismos sistemas de referencia anteriores, sea G la única homografía que lleva $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}'$, ordenadamente (cf. 2.2.2), es decir $G(A) = F(A)$, $G(B) = F(B)$, $G(C) = F(C)$. Si D es un punto cualquiera de r distinto de A, entonces $|F(A)F(B)F(C)F(D)| = |ABCD|$, por hipótesis; $|ABCD| = |G(A)G(B)G(C)G(D)|$, por la implicación anterior. Por lema anterior queda $F(D) = G(D)$, que prueba el teorema. □

Ejercicio 1.– Probar que la hipótesis de aplicación inyectiva del teorema anterior, se puede eliminar.

Veamos ahora una aplicación de la razón doble a las homologías planas (en realidad, se puede generalizar sin dificultad a dimensiones superiores). Se recuerda que se había definido la razón de una homología F de centro y eje no incidente, como el cociente entre el autovalor múltiple y el simple de cualquier matriz de F, en cualquier sistema de referencia.
Proposición 4.2.3.– Sea F una homología plana de centro O y eje e, $O \notin e$, y razón λ. Sea P un punto no doble para F y $M = OP \cap e$. Se verifica que $\lambda = |OMF(P)P|$.

Demostración: Eligiendo un sistema de referencia adecuado, como en el apartado 3) del ejemplo 3.1.6, se tiene que $O = (1 : 0 : 0)$, $e : x_0 = 0$, $P = (1 : a_1 : a_2)$, $M = (0 : a_1 : a_2)$ y $F(P) = (1 : \lambda a_1 : \lambda a_2)$. Ya es trivial comprobar que en el sistema de referencia $\{O, M; F(P)\}$ de OP, las coordenadas de P son $(\lambda : 1)$, que termina la proposición. □

Corolario 4.2.4.– Una homología plana de centro y eje no incidentes viene unívocamente dada por el centro, el eje y la razón.

Demostración: Es una cosecuencia trivial de la proposición anterior, el lema 4.2.1 y la proposición 3.2.2. □

Ejercicio 2.– Si $\mathcal{H}_{O,e}$ representa al conjunto de homologías de centro O y eje e, $O \notin e$, junto con la identidad, la aplicación que asocia a cada homología su razón y a la identidad el 1, es un isomorfismo de grupos entre $\mathcal{H}_{O,e}$ y k^*.

Ejercicio 3.– Si F es una homotecia de centro $O \in k^n$ y razón λ, entonces $\overline{F}$ es una homología de centro $\varphi(O)$, eje la recta del infinito y razón λ.

Para el caso de homografías de centro y eje incidentes, existe también un resultado que involucra a la razón doble, análogo a la proposición anterior.

Proposición 4.2.5.– Sea F una homología de centro O y eje e, $O \in e$. Sea P un punto no doble para F, se verifica que $|OF(P)PF^2(P)| = -1$.

Demostración: En el sistema de referencia del apartado 1) del ejemplo 3.1.6, $O = (0 : 1 : 0)$, $e : x_0 = 0$, $P = (1 : a_1 : a_2)$ y $F(P) = (1 : a_1 - 1 : a_2)$ y $F^2(P) = (1 : a_1 - 2 : a_2)$. Basta tomar un sistema de referencia cualquiera en OP y calcular la razón doble deseada. □

4.3 Cuaternas armónicas.

En la sección anterior han aparecido en algunas ocasiones el valor -1 para una razón doble. Pongámosle un nombre.

Definición 4.3.1.– Diremos que cuatro puntos distintos entre sí A, B, C, D de una recta proyectiva forman una *cuaterna armónica*, o también, que D es el *cuarto armónico* de los puntos A, B, C, si $|ABCD| = -1$.

El nombre tiene su origen en la Música, por la posición de los armónicos en determinados acordes musicales.

Proposición 4.3.2.– Sean A, B, C, D cuatro puntos de r distintos entre sí. Las propiedades siguientes son equivalentes:

a) A, B, C, D forman una cuaterna armónica.

b) $|ABCD| = |ABDC|$.

c) $|ABCD| = |BACD|$.

Por esta razón también se dice que el par A, B separa armónicamente al par C, D.

Demostración: Trivial □

Ejercicio 4.– Las homologías involutivas son, exactamente, las de razón -1.

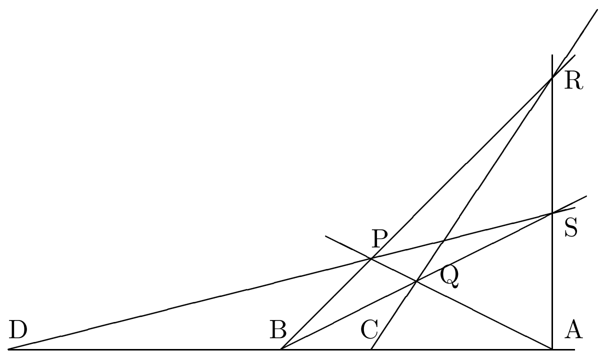
La interpretación afín de las cuaternas armónicas es muy simple, utilizando la relación vista entre razón simple y razón doble.

Proposición 4.3.3.– Sean dos puntos distintos $A, B \in k^n$. M es el punto medio del segmento AB si y sólo si $\varphi(A), \varphi(B)$ separan armónicamente a $\varphi(M), L_\infty$, donde L_∞ es el punto del infinito de la recta AB.

Demostración: Si $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$, basta ver, que en el sistema de referencia, $\{\varphi(A), \varphi(B); L_\infty\}$ el punto $\varphi(M)$ tiene coordenadas $(1 : -1)$. □

Finalmente vamos a dar un método geométrico de construcción del cuarto armónico de tres puntos dados. Para ello necesitamos un resultado previo.

Proposición 4.3.4.– En un cuadrivértice plano P, Q, R, S (*i.e.* no hay tres de ellos alineados), dos puntos diagonales cualesquiera (por ejemplo $A = PQ \cap RS$, $B = PR \cap QS$) separan armónicamente al par de puntos de intersección de la recta que determinan y los lados PS y QR que pasan por el tercer punto diagonal (que es, pues, $PS \cap QR$).



Demostración: Tomando $\mathcal{R} = \{P, Q, R; S\}$ como sistema de referencia, se tiene que $A = (1 : 1 : 0)_\mathcal{R}$, $B = (1 : 0 : 1)_\mathcal{R}$, $AB : x_0 - x_1 - x_2 = 0$, luego $C = AB \cap PS = (2 : 1 : 1)_\mathcal{R}$ y $D = AB \cap QR = (0 : 1 : -1)_\mathcal{R}$. Queda verificar con la definición de razón doble que $|ABCD| = -1$. □

Nota 4.3.5.– Dados tres puntos distintos A, B, C alineados, se trata de construir el cuarto armónico de ellos. Para ello se obtendrá un cuadrivértice $\{P, Q, R, S\}$ tal que A y B sean puntos diagonales y C sea uno de los puntos de corte de AB con una de las rectas que determinan el tercer punto diagonal. La construcción se hace en los siguientes pasos:

1. Se trazan dos rectas arbitrarias PQ y RS que pasen por A, distintas de AB.
2. Se traza por B una recta arbitraria, distinta de AB, que corte a las dos rectas anteriores en P y R, respectivamente.
3. La recta CR corta a AP en Q.
4. La recta BQ corta a AR en S.
5. La recta PS corta a AB en el punto D buscado.

Ejercicio 5.– Aplicar el método anterior y la proposición 4.3.3 para trazar el punto medio de dos puntos del plano afín, usando escuadra y cartabón.