

Tema 5.- Hipercuádricas. Clasificación proyectiva.

Comenzamos con el objeto básico de este curso. Hemos estudiado hasta ahora variedades lineales proyectivas, que están definidas por ecuaciones homogéneas de primer grado. Dando un paso adelante, vamos a estudiar hipercuádricas que van a venir dadas por ecuaciones homogéneas de segundo grado. Veamos algunos preliminares. Supondremos siempre que k es un cuerpo de característica distinta de 2, aun cuando la mayoría de los resultados se referirán a \mathbb{C} y \mathbb{R} .

Definición 5.0.1.— Un polinomio f de $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ se dice homogéneo de grado d si es de la forma

$$f = \sum_{c_0+c_1+\dots+c_n=d} c_{c_0 c_1 \dots c_n} x_0^{c_0} x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n},$$

con $c_{c_0 c_1 \dots c_n} \in k$.

La propiedad fundamental que verifican los polinomios homogéneos es la siguiente, debida a Euler:

Lema 5.0.2.— Si $f(x_0, \dots, x_n)$ es un polinomio homogéneo de grado d y $\lambda \in k$, entonces

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que cada monomio de f verifica la propiedad enunciada. □

5.1 Hipercuádricas.

Definición 5.1.1.— Una *hipercuádrica* Q del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$ es una ecuación $f = 0$ definida por un polinomio homogéneo de segundo grado, salvo escalar. Es decir, la ecuación $\lambda f = 0$ define la misma hipercuádrica Q , para cualquier $\lambda \in k$ no nulo.

En los casos $n = 2, 3$, utilizaremos para las hipercuádricas los nombres clásicos de *cónicas* y *cuádricas*, respectivamente. Con la siguiente definición distinguiremos la ecuación de sus soluciones.

Definición 5.1.2.— La *hipercuádrica-lugar* asociada a Q , será el conjunto de sus soluciones en $\mathbb{P}_n(k)$, es decir

$$\mathcal{V}(Q) = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}_n | f(a_0, \dots, a_n) = 0\}.$$

Nótese que la definición anterior es consistente, gracias al lema de Euler, porque un punto proyectivo está definido salvo escalar.

Nota 5.1.3.— Por otra parte si dos hipercuádricas Q, Q' son distintas, no se tiene necesariamente que $\mathcal{V}(Q) \neq \mathcal{V}(Q')$. Basta por ejemplo considerar en $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ la hipercuádrica Q_λ definida por la ecuación $\lambda x_0^2 + x_1^2 = 0$, donde λ es un número real estrictamente positivo. Es claro que si $\lambda \neq \lambda'$ entonces $Q_\lambda \neq Q_{\lambda'}$ y sin embargo $\mathcal{V}(Q_\lambda) = \emptyset$ para todo número real λ , estrictamente positivo. Nótese que si en el ejemplo anterior consideramos \mathbb{C} como cuerpo base (en lugar de \mathbb{R}) entonces $\mathcal{V}(Q_\lambda) \neq \mathcal{V}(Q_{\lambda'})$ siempre que λ y λ' sean dos números complejos distintos de cero y distintos entre sí. De hecho se tiene un resultado mucho más general.

Teorema 5.1.4.— Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y Q, Q' dos hipercuádricas en $\mathbb{P}_n(k)$. Entonces $Q = Q'$ si y sólo si $\mathcal{V}(Q) = \mathcal{V}(Q')$.

No daremos en este curso la prueba de este teorema. Se trata de un caso particular del *Nullstellensatz de Hilbert*, resultado central en Geometría Algebraica. Una prueba de este último resultado puede encontrarse en el libro de W. Fulton, “*Curvas Algebraicas*”, Ed. Reverté (1973). No obstante, se puede dar una demostración de aquel teorema, simplemente con los conocimientos de este tema, pero sería muy laboriosa su presentación aquí.

Nota 5.1.5.— La clave del estudio de las hipercuádricas está en la posibilidad de traducir el carácter cuadrático de sus ecuaciones a las formas bilineales simétricas. Sea Q una hipercuádrica de $\mathbb{P}_n(k)$ definida por una ecuación $f = 0$ donde f es un polinomio homogéneo de grado dos en las variables (x_0, \dots, x_n) y con coeficientes en k . Separamos los monomios “puros” (cuadrado de una variable) de los “mixtos” (producto de dos variables distintas):

$$f = f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n c_{ii} x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_i x_j \in k[x_0, \dots, x_n],$$

si notamos por A a la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} c_{00} & \frac{c_{01}}{2} & \dots & \frac{c_{0n}}{2} \\ \frac{c_{01}}{2} & c_{11} & \dots & \frac{c_{1n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c_{0n}}{2} & \frac{c_{1n}}{2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

2. $\text{rango}(Q)=1$. Su ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es un punto de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
3. $\text{rango}(Q)=0$. Su ecuación es $0=0$ y $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Ejemplo 5.1.12.— HIPERCUÁDRICAS DE LA RECTA PROYECTIVA REAL. Por el teorema de clasificación hay 4 tipos de hipercuádricas.

1. $\text{rango}(Q)=2$, $\text{sp}(Q)=2$. Su ecuación reducida es $x_0^2+x_1^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \emptyset$. Se llama hipercuádrica no degenerada imaginaria.
2. $\text{rango}(Q)=2$, $\text{sp}(Q)=0$. Su ecuación reducida es $x_0^2 - x_1^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ son dos puntos. Se llama hipercuádrica no degenerada real.
3. $\text{rango}(Q)=\text{sp}(Q)=1$. Su ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es un punto.
4. $\text{rango}(Q)=0$. Su ecuación es $0=0$ y $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

El estudio de cónicas y cuádricas lo dejaremos par el tema siguiente, puesto que necesitaremos el concepto de polaridad. Para terminar presentamos un método rápido de cálculo de la signatura proyectiva de una hipercuádrica real. Para ello necesitamos recordar algunos resultados, el primero de ellos del curso previo de Álgebra Lineal.

Lema 5.1.13.— Toda matriz simétrica real A es semejante a una matriz diagonal D , con matriz de paso ortogonal, *i.e.* existe una matriz M , $M^t = M^{-1}$, tal que $MAM^t = D$.

Lema 5.1.14.— Si $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio con todas sus raíces reales y distintas de cero, entonces el número de raíces positivas (contadas con su multiplicidad), coincide con el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes.

DEMOSTRACIÓN: (Cf. P.Abellanas. “*Elementos de Matemáticas*”, cap. VII, §1, nº 5) □

Nota 5.1.15.— Se sabe también que, con las hipótesis de este lema 5.1.14, los coeficientes nulos de $f(x)$ están siempre entre un coeficiente positivo y otro negativo, por lo que es indiferente el signo asignado al 0. Es una consecuencia de este lema que el número de raíces negativas de $f(x)$ (contadas con su multiplicidad), es el de raíces positivas de $g(x) = f(-x)$, y por tanto, coincide con el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes de $g(x)$, que no es sino el número de permanencias de signo de $f(x)$.

Teorema 5.1.16.— Sea Q una hipercuádrica real de ecuación $XAX^t = 0$. Se verifica que $\text{sp}(Q)$ coincide con la diferencia, en valor absoluto, entre el número de cambios de signo y de permanencias de la sucesión de coeficientes del polinomio $q(\lambda)$, obtenido dividiendo el polinomio característico de A , $p(\lambda) = |\lambda I - A|$, por la máxima potencia de λ por la que sea divisible.

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 5.1.13, $\text{sl}(A)$ es el número de autovalores positivos de A (contados con su multiplicidad), y $\text{sl}(-A)$ es el número de autovalores negativos de A . Por el lema 5.1.14 $\text{sl}(A)$ es el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes de $q(\lambda)$, y $\text{sl}(-A)$ es el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes de $q(-\lambda)$, o bien el número de permanencias de signo de la sucesión de coeficientes de $q(\lambda)$. La fórmula $\text{sp}(Q) = |\text{sl}(A) - \text{sl}(-A)|$ termina la demostración. □