Tema 7.- Haces de hipercuádricas. Clasificación de los haces de cónicas. Determinación de cónicas.

7.1 Puntos base y fundamentales de un haz

Definición 7.1.1.– Sea el espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$ de dimensión n sobre un cuerpo k de característica distinta de dos. Sean Q, Q' dos hipercuádricas en $\mathbb{P}_n(k)$ definidas por las ecuaciones $XAX^t = 0$ y $XA'X^t = 0$ respectivamente. Se llama *haz de hipercuádricas generado por Q y Q'* a la familia de hipercuádricas definidas por las ecuaciones $X(\lambda A + \lambda' A' X^t = 0$ con $(\lambda : \lambda') \in \mathbb{P}_1(k)$.

Nota 7.1.2.– Sean Q y Q' dos hipercuádricas distintas de $\mathbb{P}_n(k)$. Sea $\mathcal{H}$ el haz definido por Q y Q'. Entonces, el haz definido por dos hipercuádricas distintas de $\mathcal{H}$ coincide con $\mathcal{H}$.

Definición 7.1.3.– Se llama base de un haz $\mathcal{H}$ y se representa $Base(\mathcal{H})$ al conjunto de puntos

$$\bigcap_{Q \in \mathcal{H}} \mathcal{V}(Q).$$

Es decir $Base(\mathcal{H})$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{P}_n(k)$ que pertenecen a todas las hipercuádricas lugar del haz $\mathcal{H}$.

Nota 7.1.4.– En adelante diremos que un punto $P \in \mathbb{P}_n$ pertenece a una hipercuádrica si P pertenece a la hipercuádrica lugar correspondiente.

Lema 7.1.5.– Si $\mathcal{H}$ es un haz de hipercuádricas, se tiene :

$$Base(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q')$$

donde Q y Q' son dos hipercuádricas cualesquiera (distintas) del haz.

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que $Base(\mathcal{H}) = \bigcap_{Q'' \in \mathcal{H}} \mathcal{V}(Q'') \subset \mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q')$. Recíprocamente, sea $P \in \mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q')$ y sea Q'' una hipercuádrica de $\mathcal{H}$. Sean $P = (a_0 : \cdots : a_n)$, y A, A', A'' matrices simétricas tales que $Q : XAX^t = 0$, $Q' : XA'X^t = 0$, $Q'' : XA''X^t = 0$. Existen $\lambda, \lambda' \in k$, no ambos nulos, tales que $A'' = \lambda A + \lambda' A'$. Entonces

$$(a_0, \ldots, a_n) A'' \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda (a_0, \ldots, a_n) A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda' (a_0, \ldots, a_n) A' \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

y por tanto $P \in \mathcal{V}(Q'')$. □

Lema 7.1.6.– Si $P \in \mathbb{P}_n$ no es un punto base de un haz $\mathcal{H}$, entonces existe una única hipercuádrica Q de $\mathcal{H}$ que pasa por P.

DEMOSTRACIÓN: Si existiera más de una hipercuádrica del haz pasando por el punto P, éste sería un punto base por 7.1.5. Esto prueba la unicidad. Veamos la existencia. Sean $Q, Q' \in \mathcal{H}$ dos hipercuádricas distintas. Consideremos $P = (a_0 : \cdots : a_n)$ y A, A' matrices simétricas tales que $Q : XAX^t = 0$ y $Q' : XA'X^t = 0$. Podemos suponer $(a_0, \ldots, a_n) A (a_0, \ldots, a_n)^t \neq 0$. La ecuación

$$\lambda (a_0, \ldots, a_n) A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda' (a_0, \ldots, a_n) A' \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

tiene siempre una solución en $(\lambda : \lambda') \in \mathbb{P}_1(k)$. En efecto, basta tomar $\lambda = (a_0, \ldots, a_n) A' (a_0, \ldots, a_n)^t$ y $\lambda' = -(a_0, \ldots, a_n) A (a_0, \ldots, a_n)^t$. □

Nota 7.1.7.– En resumen, dado un punto $P \in \mathbb{P}_n$, o está en todas las hipercuádricas de un haz (P es un punto base) o está solamente en una de ellas (P no es un punto base).

Definición 7.1.8.– Un haz se dice *degenerado* si todas las hipercuádricas que lo componen son degeneradas.

Lema 7.1.9.– En un haz no degenerado de $\mathbb{P}_n(k)$ existen a lo más $n+1$ hipercuádricas degeneradas. Si además k es algebraicamente cerrado, existe al menos una degenerada.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{H}$ un haz no degenerado y sea $Q \in \mathcal{H}$ una hipercuádrica no degenerada. Sea $Q' \in \mathcal{H}$ otra hipercuádrica. Sean A,A', las matrices de las ecuaciones de Q, Q' respectivamente. Escribamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; A' = \begin{pmatrix} a'_{00} & \ldots & a'_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{0n} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces una hipercuádrica del haz tiene una matriz de la forma

$$C_{(\lambda:\mu)} = \begin{pmatrix} \lambda a_{00} + \mu a'_{00} & \dots & \lambda a_{0n} + \mu a'_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{0n} + \mu a'_{0n} & \dots & \lambda a_{nn} + \mu a'_{nn} \end{pmatrix}, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1(k).$$

Calculemos los $(\lambda : \mu)$ tales que $\det(C_{(\lambda:\mu)}) = 0$. Podemos suponer $\mu \neq 0$ ya que $\det(C_{(\lambda:0)}) \neq 0$ (si $\lambda \neq 0$) y $\det(C_{(\lambda,\mu)})$ es un polinomio homogéneo de grado $n+1$ en las variables (λ, μ). Obsérvese que el determinante de $C_{(\lambda:1)}$ es un polinomio, en la variable λ, de la forma

$$\det(A)\lambda^{n+1} + \dots$$

y este polinomio es de grado $n+1$, luego tiene a lo sumo $n+1$ raíces en k. □

Definición 7.1.10.– Los *puntos fundamentales* de un haz $\mathcal{H}$ son los puntos del conjunto

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigcup_{Q \in \mathcal{H}} \mathrm{Sing}(Q).$$

Lema 7.1.11.– Sea $\mathcal{H}$ un haz no degenerado. Sea P un punto de $\mathbb{P}_n$. Son equivalentes :

1. P es fundamental.
2. $\mathrm{pol}_Q(P) = \mathrm{pol}_{Q'}(P)$ para cualesquiera dos hipercuádricas Q, Q' (distintas) de $\mathcal{H}$ tales que $P \notin \mathrm{Sing}(Q)$ y $P \notin \mathrm{Sing}(Q')$.
3. Existen dos hipercuádricas Q, Q' (distintas) de $\mathcal{H}$ tales que $P \notin \mathrm{Sing}(Q)$ y $P \notin \mathrm{Sing}(Q')$ y tales que $\mathrm{pol}_Q(P) = \mathrm{pol}_{Q'}(P)$

Demostración: Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en $\mathbb{P}_n(k)$.

1) ⇒ 2) Sea $P = (a_0 : \cdots : a_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Entonces existe $Q'' \in \mathcal{H}$ tal que $P \in \mathrm{Sing}(Q'')$ (esto es: $(a_0, \dots, a_n)A'' = 0$, donde $Q'' : XA''X^t = 0$). Sean $Q, Q' \in \mathcal{H}$, $(Q \neq Q',)$ tales que $P \notin \mathrm{Sing}(Q) \cup \mathrm{Sing}(Q')$ y supongamos que A, A' son matrices representantes de ecuaciones de Q, Q' respectivamente. Como $Q \neq Q''$ (ya que P es singular para Q'' y no singular para Q) la matriz A' puede escribirse de la forma

$$A' = \lambda A + \mu A''$$

y por tanto

$$(a_0, \dots, a_n)A' = (a_0, \dots, a_n)(\lambda A + \mu A'') = \lambda(a_0, \dots, a_n)A + \mu(a_0, \dots, a_n)A'' = \lambda(a_0, \dots, a_n)A.$$

Esto prueba que $\mathrm{pol}_Q(P) = \mathrm{pol}_{Q'}(P)$ ya que $\lambda \neq 0$ (si lo fuera, Q' sería igual a Q'' y esto no es posible pues P es singular para Q'' y no singular para Q').

2) ⇒ 3) Es evidente.

3) ⇒ 1) Sean A, A' matrices representantes de las ecuaciones de dos hipercuádricas Q, Q'. Sea $\lambda \in k$ (no nulo) tal que

$$(a_0, \dots, a_n)A = \lambda(a_0, \dots, a_n)A'$$

con $(a_0 : \cdots : a_n) = P$. La existencia de λ se deduce de la igualdad $\mathrm{pol}_Q(P) = \mathrm{pol}_{Q'}(P)$. Sea $Q'' = [A - \lambda A'] \in \mathcal{H}$. Es claro que P es singular para Q'' ya que

$$(a_0, \dots, a_n)(A - \lambda A') = (a_0, \dots, a_n)A - \lambda(a_0, \dots, a_n)A' = 0.$$

□

Nota 7.1.12.– De la prueba del teorema anterior se deduce fácilmente que si un punto P es singular para dos hipercuádricas distintas de un haz $\mathcal{H}$, lo es para todas las hipercuádricas de $\mathcal{H}$ y éste es degenerado. Es decir, si $\mathcal{H}$ es no degenerado,

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigsqcup_{Q_0 \in \mathcal{H}} \mathrm{Sing}(Q_0)$$

7.2 Clasificación de los haces de cónicas

En lo que sigue trabajaremos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Algunos de los resultados enunciados son también válidos en el plano proyectivo real. La verificación de la validez es dejada como ejercicio, por ejemplo el lema 7.1.9.

Proposición 7.2.1.– Sean Q, Q' dos cónicas distintas tales que $\mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q')$ contiene a una recta. Entonces el haz $\mathcal{H}(Q, Q')$ es degenerado.

DEMOSTRACIÓN: Como la base de $\mathcal{H}(Q, Q')$ contiene una recta, todas las cónicas de este haz contienen una recta, luego son degeneradas y el haz es degenerado. □

Proposición 7.2.2.– Sean Q, Q' dos cónicas degeneradas tales que $\mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q')$ es un punto. Entonces el haz $\mathcal{H}(Q, Q')$ es degenerado.

DEMOSTRACIÓN: Como antes, hay tres casos posibles:

- Q es un par de rectas y Q' es otro par de rectas. En este caso, el punto singular de Q debe coincidir con el de Q' (en caso contrario, Q y Q' se cortarían en más de un punto). Así, el resultado sigue de 7.1.12.
- Q es un par de rectas, Q' es una recta doble y debe pasar por el punto singular de Q (si no, Q' cortaría a Q en más de un punto). El resultado sigue de 7.1.12.
- Q es una recta doble y Q' es otra recta doble. Así, existe un punto P singular para ambas cónicas y el resultado es consecuencia de 7.1.12.

□

Veamos ahora los diferentes tipos de haces de cónicas (no degenerados) que pueden presentarse. Lo haremos usando el 7.1.9 y los dos resultados anteriores, en función del número y tipo de cónicas degeneradas que haya en el haz.

7.2.1 Tipo 1

Consideremos las cuatro rectas r, r', s, s' (en posición general) y los puntos A, B, C, D como en la figura 1. Sea $\mathcal{H}$ el haz generado por las cónicas Q_1 y Q_2 tales que $\mathcal{V}(Q_1) = r \cup r'$ y $\mathcal{V}(Q_2) = s \cup s'$.

Tomemos $\mathcal{R} = \{A, B, C; D\}$ como sistema de referencia. Unas matrices M_1, M_2 representantes de Q_1, Q_2 son:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos cuáles son las cónicas degeneradas de este haz. La matriz de una cónica genérica del haz es de la forma $M_{(\lambda_1:\lambda_2)} = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$, así,

$$|M_{(\lambda_1:\lambda_2)}| = |\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2| = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Hay tres cónicas degeneradas en el haz, la correspondiente a $(\lambda_1 : 0) = (1 : 0)$ que es Q_1, la que corresponde a $(0 : \lambda_2) = (0 : 1)$ que es Q_2 y la que se obtiene para $(\lambda_1 : \lambda_2) = (1 : 1)$. Esta última cónica es otro par de rectas Q_3 cuyo lugar es $t \cup t'$ y cuya clase matriz está definida por

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

correspondiente a la ecuación $x_1(x_0 - x_2) = 0$.

Los puntos base son los puntos de corte de los dos pares de rectas, es decir $\{A, B, C, D\}$, y los puntos fundamentales son los puntos singulares de las cónicas degeneradas, es decir los puntos diagonales del cuadrivértice. Las polares de estos puntos respecto de las cónicas del haz para las que no son singulares, coinciden. Tomemos un punto diagonal del cuadrivértice, por ejemplo $R = r \cap r'$. Este punto no es singular para la cónica Q_2 ni para Q_3, luego se tiene la igualdad de rectas $\mathrm{pol}_{Q_2}(R) = \mathrm{pol}_{Q_3}(R)$ (ver 7.1.11). Esta recta pasa por los otros puntos fundamentales (ya que $s \cap s'$ es conjugado con todos los puntos del plano, respecto de Q_2 y análogamente ocurre con $t \cap t'$, respecto de Q_3). Así, la recta $\mathrm{pol}_{Q_2}(R)$ es la recta diagonal que no pasa por R. Un razonamiento análogo se aplica a los otros puntos fundamentales. El siguiente teorema es una caracterización de las cónicas del haz $\mathcal{H}$.

Teorema 7.2.3.– Una cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ pertenece al haz $\mathcal{H}$ si y sólo si pasa por los puntos A, B, C, D.

Demostración: Si una cónica pertenece al haz, pasa por los puntos base $\{A, B, C, D\}$.

Veamos la otra implicación. Consideremos $\mathcal{R} = \{A, B, C, D\}$ como sistema de referencia en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Como antes, consideremos (con las notaciones anteriores) Q_1 y Q_2. Se tiene desde luego la igualdad $\mathcal{H}(Q_1, Q_2) = \mathcal{H}$. Una matrices representantes de Q_1 y Q_2 son:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea Q una cónica que pasa por los puntos A, B, C, D. Vamos a probar que su matriz respecto $\mathcal{R}$ es combinación de las dos matrices anteriores. En efecto, notemos M una matriz de Q. Se tiene:

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

como $A = (1 : 0 : 0)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{V}(Q)$ se tiene que $a_{00} = 0$. Análogamente, como B y C también pertenecen a $\mathcal{V}(Q)$, entonces, $a_{11} = 0$ y $a_{22} = 0$. como $D = (1 : 1 : 1)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{V}(Q)$ se tiene que $a_{01} + a_{02} + a_{12} = 0$, entonces la matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & -a_{01} - a_{12} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ -a_{01} - a_{12} & a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{01} M_1 - a_{12} M_2.$$

Luego $Q \in \mathcal{H}(Q_1, Q_2)$. □

Nota 7.2.4.– (Construcción geométrica de la polar de un punto respecto de una cónica). Lo anterior proporciona un método geométrico para trazar la polar de un punto respecto a una cónica. Sea Q una cónica y sea P un punto no perteneciente a $\mathcal{V}(Q)$. Se trazan dos rectas por P cada una de ellas cortando a $\mathcal{V}(Q)$ en dos puntos distintos (Q no puede reducirse a una recta doble, caso en el que el cálculo de la polar es trivial). Sean estos puntos A, B, C, D. Dichos puntos forman un cuadrivértice. Tracemos los tres pares de rectas posibles que los contienen. Es decir, $(A + B) \cup (C + D)$, $(A + C) \cup (B + D)$, $(B + C) \cup (A + D)$, uno de esos pares es el par de rectas que trazamos al principio. Entonces, por el teorema anterior, Q pertenece al haz formado por dos de esos pares de rectas, y como P es fundamental en ese haz, su polar es la recta que pasa por los otros dos puntos fundamentales, es decir, los otros dos puntos diagonales del cuadrivértice A, B, C, D.

Nota 7.2.5.– Como aplicación de lo visto anteriormente se pueden resolver los siguientes problemas de determinación de cónicas.

1. Dados 5 puntos, 3 a 3 no alineados, existe una única cónica no degenerada que pasa por los 5 puntos dados . En efecto: se construye la matriz genérica del haz del tipo 1 con 4 de los puntos dados y se halla la cónica del haz que pasa por el punto restante.
2. Dadas 5 rectas, 3 a 3 no concurrentes, existe una única cónica no degenerada tangente a las 5 rectas. Se usa la cónica dual en $\mathbb{P}_2^*$(cf prop. **??**.4).
3. Dados 4 puntos, 3 a 3 no alineados, y una recta que no pase por ninguno de ellos, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por los cuatro puntos y son tangentes a la recta dada.
4. Dadas 4 rectas, 3 a 3 no concurrentes, y un punto de ninguna de las rectas, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por el punto y son tangentes a las 4 rectas dadas.

7.2.2 Tipo 2

Consideremos dos pares de rectas r, r', s, s' como en la figura 2 :

Los pares de rectas se cortan en tres puntos P, Q, R donde P es singular para la cónica Q_1 cuyo lugar es $r \cup r'$. Llamemos Q_2 a la cónica de lugar $s \cup s'$ y a su punto singular $S = s \cap s'$. Sea $\mathcal{H}$ el haz definido por las dos cónicas anteriores.

Como antes calculemos las cónicas degeneradas de $\mathcal{H}$. Empecemos tomando un sistema de referencia adecuado. Sea $\mathcal{R} = \{P, Q, R; U\}$, donde U es un punto cualquiera de $s \setminus \{S, P\}$. Entonces, unas matrices representantes de Q_1 y Q_2 son, respectivamente:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y una matriz de una cónica genérica del haz es:

$$M_{(\lambda_1:\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $\lambda_1^2\lambda_2$. Así, hay solamente dos cónicas degeneradas en $\mathcal{H}$. Como P es un punto base y fundamental, todas las cónicas no degeneradas del haz tienen la misma tangente en P, a saber, la recta s.

Teorema 7.2.6.– Conservamos las notaciones anteriores. Sea C una cónica no degenerada en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Son equivalentes:

i) C pertenece a $\mathcal{H}$.

ii) C pasa por los puntos P, Q, R y es tangente a s en el punto P.

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$ Esta parte está probada en lo que antecede al teorema.
$ii) \Rightarrow i)$ Elijamos como antes un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P, Q, R, U\}$ en el plano. Sea C una cónica que pasa por P, Q, R y es tangente a s en P. Una matriz de C, respecto de $\mathcal{R}$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, s tiene como ecuación $x_1 - x_2 = 0$ respecto $\mathcal{R}$. Como C es tangente a s en P debe verificarse que

$$((1,0,0)A(x_0, x_1, x_2)^t = 0) \equiv (x_1 - x_2 = 0).$$

Es decir $a_{01} = -a_{02}$. Entonces la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & -a_{01} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ -a_{01} & a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{01}M_1 + a_{12}M_2.$$

Lo que prueba que C está en $\mathcal{H}$. $\square$

Nota 7.2.7.– Como aplicación de lo visto anteriormente se pueden resolver los siguientes problemas de determinación de cónicas.

1. Dados 4 puntos, 3 a 3 no alineados, y una recta que pase por uno de ellos, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por los cuatro puntos y son tangentes a la recta dada. Se construye el haz del tipo 2 obtenido con 3 de los puntos dados y la recta dada, y se halla la cónica del haz que pasa por el punto restante.
2. Dadas 4 rectas, 3 a 3 no concurrentes, y un punto de una de ellas, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por el punto y son tangentes a las 4 rectas dadas. Es el dual del caso anterior.
3. Dados 3 puntos no alineados, una recta que pasa por uno de ellos y otra que no pasa por ninguno de ellos, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por los puntos dados y son tangentes a las rectas dadas.
4. Dadas 3 rectas no concurrentes, un punto de una de ellas y otro que no está en ninguna de ellas, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por los puntos dados y son tangentes a las rectas dadas.

7.2.3 Tipo 3

Consideremos tres rectas r, r', s como en la figura 3 (la recta s aparece "repetida" pues representará la cónica degenerada cuya cónica lugar es s). Sea $P = r \cap r'$ y sean Q, R los puntos de corte de s con r y r' respectivamente.

Veamos cuáles son las cónicas degeneradas del haz $\mathcal{H}$ generado por Q_1, cuyo lugar es $r \cup r'$ y Q_2, cuyo lugar es s. Tomando $\mathcal{R} = \{P, Q, R; U\}$, con U cualquier punto en posición general respecto de los otros tres, unas matrices representantes de Q_1 y Q_2 son:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz de una cónica genérica del haz es de la forma

$$M_{(\lambda_1:\lambda_2)} = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $\lambda_2\lambda_1^2$. Hay solamente dos cónicas degeneradas, Q_1 y Q_2.

Nótese que la polar del punto P, por ser fundamental, es la misma para todas las cónicas de $\mathcal{H}$ para las que P es no singular. Esta polar es la recta s. Lo mismo ocurre con los puntos fundamentales Q y R. La polar de Q es la recta r, respecto de toda cónica de $\mathcal{H}$ para la que Q es no singular. Análogamente, la polar de R es r'.

Teorema 7.2.8.– Con las notaciones anteriores, sea C una cónica en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Son equivalentes:

i) C está en $\mathcal{H}$.

ii) C pasa por $\{Q, R\}$ y es tangente a r en Q y a r' en R.

En este caso se dice que las cónicas del haz $\mathcal{H}$ son *bitangentes* en $\{Q, R\}$.

DEMOSTRACIÓN: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Hemos probado esta parte en lo que antecede al teorema.
ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $\mathcal{R} = \{P, Q, R; U\}$ un sistema de referencia en el plano, con U cualquier punto en posición general respecto de los otros tres. Unas matrices de unas ecuaciones de las cónicas Q_1, Q_2, que definen el haz, son, respectivamente:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz de una ecuación de C verificando *ii)*, con

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Como $Q, R \in \mathcal{V}(C)$ entonces $a_{11} = a_{22} = 0$, como $r = \mathrm{pol}_C(Q)$ entonces $a_{01} = 0$ y como $r' = \mathrm{pol}_C(R)$ entonces $a_{02} = 0$. Así, la matriz A es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} M_1 + a_{00} M_2.$$

Es decir, C está en $\mathcal{H}$. □

Nota 7.2.9.– Como aplicación de lo visto anteriormente se pueden resolver los siguientes problemas de determinación de cónicas.

1. Dados dos rectas y tres puntos, dos de ellos incidentes con una recta dada exactamente, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por los puntos dados y son tangentes a las rectas dadas. Se resolvería calculando, en el haz de bitangentes definido por el par de puntos y rectas incidentes, la cónica que pasa por el tercer punto.

2. Dadas 3 rectas no concurrentes, y dos puntos incidentes con una recta dada exactamente, hallar las cónicas no degeneradas que pasan por los puntos dados y son tangentes a las rectas dadas. Es el caso dual del anterior.

7.2.4 Tipo 4

Sean Q_1 una cónica no degenerada, P un punto de Q_1, t la tangente a Q_1 en P. Sea t' otra recta pasando por P y Q_2 la cónica cuyo lugar es $t \cup t'$ Sea P' el otro punto de corte de Q_1 con t' (ver figura 4).

Sea $\mathcal{R} = \{P, P', P''; U\}$ un sistema de referencia verificando:

- $U \in \mathcal{V}(Q_1)$.
- $P'' = \mathrm{pol}_{Q_1}(P') \cap t$.

Una matriz de una ecuación de Q_2 será

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, y puesto que, de una parte, $P, P', U \in Q_1$ y de otra, $\mathrm{pol}_{Q_1}(P) \equiv (x_1 = 0)$ y $\mathrm{pol}_{Q_1}(P') \equiv (x_0 = 0)$, una matriz de una ecuación de Q_1 será de la forma

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, una matriz de una cónica genérica del haz $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q_1, Q_2)$ es

$$M_{(\lambda_1:\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & -2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es $-\lambda_2^3$, es decir, $\mathcal{H}$ tiene una única cónica degenerada, la propia Q_2. El único punto fundamental es P (que es también un punto base). Toda cónica no degenerada del haz tiene a t como recta tangente en P. En cambio, y puesto que P' no es fundamental, la tangente a P' (respecto de una cónica no degenerada de $\mathcal{H}$, y distinta de Q_1) es distinta de $\mathrm{pol}_{Q_1}(P')$.

Teorema 7.2.10.– Con las notaciones anteriores, sea Q una cónica no degenerada de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Entonces, son equivalentes:

i) Q pertenece a $\mathcal{H} \setminus Q_1$.

ii) $\mathcal{V}(Q_1) \cap \mathcal{V}(Q) = \{P, P'\}$, las tangentes a Q y Q_1 en P son iguales (a t) y las tangentes a Q y Q_1 en P' son distintas.

DEMOSTRACIÓN: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Esto se ha probado en lo que antecede al enunciado del teorema.
ii) $\Rightarrow$ *i)* Como hemos visto, tomado el sistema de referencia de más arriba, unas matrices representantes de Q_1 y Q_2 son:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea Q una cónica no degenerada verificando *ii)*. Escribamos la matriz A de Q como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & 0 \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

donde hemos utilizado que los puntos P, P' están en Q y que $\mathrm{pol}_Q(P) = t \equiv (x_1 = 0)$. Por otra parte, $\mathcal{V}(Q)$ sólo corta a $\mathcal{V}(Q_1)$ en los puntos $\{P, P'\}$. Escribamos las ecuaciones de $\mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q')$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_0x_1 & & & - & x_2^2 & = & 0 \\ 2a_{01}x_0x_1 & + & 2a_{12}x_1x_2 & + & a_{22}x_2^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

que es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_2(2a_{12}x_1 + (2a_{01} + a_{22})x_2) = 0 \end{array} \right.$$

Las únicas soluciones $(x_0 : x_1 : x_2)$ de este sistema con $x_2 = 0$ son $P = (1 : 0 : 0)$ y $P' = (0 : 1 : 0)$. Supongamos ahora que $x_2 \neq 0$. Debe verificarse entonces,

$$2a_{12}x_1 + (2a_{01} + a_{22})x_2 = 0.$$

Por otra parte, como $\mathrm{pol}_Q(P') \equiv (a_{01}x_0 + a_{12}x_2 = 0) \neq (x_0 = 0)$, se tiene $a_{12} \neq 0$. Si $2a_{01} + a_{22} \neq 0$, el punto

$$\left(\frac{4a_{12}^2}{2a_{01} + a_{22}}, 2a_{01} + a_{22}, -2a_{12}\right)$$

está en $\mathcal{V}(Q_1) \cap \mathcal{V}(Q)$ y es distinto de P y de P'. Así pues, debe verificarse $2a_{01} + a_{22} = 0$. Entonces, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & 0 \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{12} & -2a_{01} \end{pmatrix} = a_{01}M_1 + a_{12}M_2.$$

Esto prueba que Q está en el haz $\mathcal{H}$. $\square$

Nota 7.2.11.– Dos cónicas no degeneradas, Q, Q_1, como en el teorema anterior se dirán *osculatrices* en el punto P, que es el único punto fundamental del haz definido por ambas.

Nota 7.2.12.– Como aplicación de lo visto anteriormente se pueden resolver los siguientes problemas de determinación de cónicas.

1. Dada una cónica no degenerada Q y tres puntos, dos de ellos del lugar de Q, hallar una cónica no degenerada que sea osculatriz con Q en uno de los puntos de su lugar, y pase por los otros dos puntos. Se resolvería con el haz de osculatrices definido por Q y la cónica definida por la tangente a Q en el punto osculador y la recta que pasa por los dos puntos del lugar de Q.

2. ¿Problema dual del anterior?

7.2.5 Tipo 5

Sean Q_1 una cónica no degenerada, P un punto de Q_1, t la tangente a Q_1 en P. (Ver figura 5).

Consideremos el haz $\mathcal{H}$ generado por Q_1 y por Q_2, la cónica cuyo lugar es t. Este haz tiene solamente un punto base, P, y, al menos, una recta de puntos fundamentales, t.

Hallemos las cónicas degeneradas de este haz. Si tomamos $\mathcal{R} = \{P, P', P''; U\}$ un sistema de referencia tal que $U, P'' \in \mathcal{V}(Q_1) \setminus \{P\}$ y $P' = \mathrm{pol}_Q(P'') \cap t$, unas matrices M_1, M_2 representantes de Q_1, Q_2 son, respectivamente,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matriz de una cónica genérica de este haz tiene la forma

$$M_{(\lambda_1:\lambda_2)} = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -2\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante vale $-2\lambda_1^3$. Así, la única cónica degenerada del haz es Q_2. El punto P es base y fundamental y todas las cónicas no degeneradas del haz tienen a t como tangente en P.

Teorema 7.2.13.– Con las notaciones anteriores, sea Q una cónica no degenerada de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Son equivalentes:

i) Q está en $\mathcal{H} \setminus \{Q_1\}$.

ii) $\mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q_1) = \{P\}$.

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$ Esto ha sido probado en lo que antecede al enunciado de este teorema.
$ii) \Rightarrow i)$ Sea Q una cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ verificando $ii)$. Tomando el mismo sistema de referencia que más arriba, una matriz de Q tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

puesto que $P = (1:0:0)$ están en Q. Usemos ahora la hipótesis de que $\mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q_1) = \{P\}$. El sistema de ecuaciones de $\mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q_1)$ es

$$\left\{ \begin{array}{r} 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ -x_0x_2 + x_1^2 = 0 \end{array} \right.$$

o equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2[(2a_{02} + a_{11})x_0 + 2a_{12}x_1 + a_{22}x_2] = 0 \\ -x_0x_2 + x_1^2 = 0 \end{array} \right.$$

En este sistema, si $x_2 = 0$ entonces $x_1 = 0$, y la solución es, en este caso, $P = (1:0:0)$. Si $x_2 \neq 0$, entonces se pueden dividir las dos ecuaciones del sistema anterior por x_2^2, quedando

$$\begin{array}{c} \frac{x_0}{x_2} = (\frac{x_1}{x_2})^2 \\ 2a_{01}(\frac{x_1}{x_2})^3 + (2a_{02} + a_{11})(\frac{x_1}{x_2})^2 + 2a_{12}(\frac{x_1}{x_2}) + a_{22} = 0 \end{array}$$

La ecuación de tercer grado no es idénticamente nula porque si $a_{22} = 0$, entonces $P' \in \mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q_1)$, contra la hipótesis. Por otra parte, si tiene una solución $\lambda \in \mathbb{C}$, al ser algebraicamente cerrado, entonces el punto $(\lambda^2 : \lambda : 1)$ verifica el sistema de ecuaciones anterior y, por tanto, está en $\mathcal{V}(Q) \cap \mathcal{V}(Q_1)$, contra la hipótesis.

La única posibilidad restante es que la ecuación anterior de tercer grado tenga todos los términos nulos menos el independiente, es decir: $a_{01} = 2a_{02} + a_{11} = a_{12} = 0$. Entonces, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{02} \\ 0 & -2a_{02} & 0 \\ a_{02} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{02}M_1 + a_{22}M_2.$$

Y, por tanto, Q está en $\mathcal{H}$. □

Nota 7.2.14.– Dos cónicas no degeneradas, Q, Q_1, como en el teorema anterior se dirán *superosculatrices* en el punto P.

Nota 7.2.15.– Como aplicación de lo visto anteriormente se pueden resolver los siguientes problemas de determinación de cónicas.

1. Dada una cónica no degenerada Q y dos puntos, uno de ellos del lugar de Q, hallar una cónica no degenerada que sea superosculatriz con Q en el punto de su lugar, y pase por el otro punto. Se resolvería con el haz de superosculatrices definido por Q y la cónica definida por la tangente a Q en el punto superosculador.

2. ¿Problema dual del anterior?

PARA AMPLIAR: EN LO QUE SIGUE SE ESTUDIA LA EQUIVALENCIA ENTRE HACES

7.3 Equivalencia proyectiva de haces

Definición 7.3.1.– Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos haces de hipercuádricas en $\mathbb{P}_n(k)$. Diremos que $\mathcal{H}$ es (proyectivamente) equivalente a $\mathcal{H}'$ si existe un cambio de sistema de referencia que lleva uno en el otro.

Teorema 7.3.2.– En $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, dos haces no degenerados de cónicas, son equivalentes si y sólo si son del mismo tipo.

DEMOSTRACIÓN: El teorema de caracterización del tipo 1, permite asegurar que el cambio de sistema de referencia (que formalmente es análogo a una homografía) que transforma los puntos base de un haz en los del otro, cf. **??**, garantiza que los dos haces son equivalentes.

Los teoremas de caracterización de los tipos 2 y 3, se harían de un modo análogo. La diferencia con el tipo 1 está en que no es único el cambio de sistema de referencia entre dos haces de estos tipos.

Para el tipo 4 es necesario probar que, dadas dos cónicas no degeneradas y dos puntos en cada uno de sus lugares, existe un cambio de sistema de referencia que lleva una cónica en la otra, y los puntos de una en los de la otra.

El tipo 5 es más fácil que el anterior. □