Tema 9.- Interpretación proyectiva de propiedades euclídeas. Elementos de las cónicas y cuádricas euclídeas

9.1 El espacio euclídeo como subespacio del proyectivo.

Consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ (espacio afín $\mathbb{R}^n$ con un producto escalar) y $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de la manera habitual (i.e. considerando $H \equiv (x_0 = 0)$ como el hiperplano del infinito). Como el producto escalar es una forma bilineal simétrica definida positiva sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, que es el espacio vectorial que va sobre H, se define así una hipercuádrica Ω sobre H con rango(Ω)=sp(Ω) $= n$, clásicamente llamada *hipercuádrica del absoluto.*

Algunas propiedades del espacio euclídeo se podrán interpretar fácilmente en el espacio proyectivo: todas las relativas a perpendicularidad, ángulos, semejanzas... Por ejemplo:

Proposición 9.1.1.– Dos variedades lineales L_1, L_2 del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ son perpendiculares si y sólo si $\mathrm{pol}_\Omega(L_{1,\infty}) \subset L_{2,\infty}$ o $\mathrm{pol}_\Omega(L_{1,\infty}) \supset L_{2,\infty}$. En particular, L_1 y L_2 son rectas perpendiculares si y sólo si $L_{1,\infty}$ y $L_{2,\infty}$ son puntos conjugados respecto de Ω. Otro ejemplo, una recta L_1 y un hiperplano L_2 son perpendiculares si y sólo si $\mathrm{pol}_\Omega(L_{1,\infty}) = L_{2,\infty}$.

Demostración: Hay que recordar que dos variedades lineales L_1, L_2 del espacio euclídeo se dicen perpendiculares si $\mathrm{D}(L_1)^\perp \subset \mathrm{D}(L_2)$ o al revés. Por otra parte, los vectores de la dirección de una variedad lineal afín L corresponden a los puntos del infinito de esa variedad, es decir a los de $\overline{L} \cap H = L_\infty$. Finalmente observar que dos vectores de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si los puntos correspondientes de H son conjugados respecto de Ω. □

Sea ahora Q una hipercuádrica afín de $\mathbb{R}^n$. Recuérdese que define a $Q_\infty = \overline{Q}_{|H}$ en H. Por tanto en H hay dos hipercuádricas: Q_∞ y Ω. En lo sucesivo, suponemos que Ω está definido por el producto escalar clásico, dado por la matriz identidad, es decir, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Definición 9.1.2.– Se dice que Q es una *esfera* de $\mathbb{R}^n$ si $Q_\infty = \Omega$. En dimensión dos se dirá *circunferencia.*

En casos distintos a las esferas, Q_∞ y Ω definen un haz $\mathcal{H}$ de hipercuádricas en $H \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. En el caso $n = 3$, podemos decir algo sobre el haz de cónicas $\mathcal{H}$.

Proposición 9.1.3.– Si Q es una cuádrica de $\mathbb{R}^3$ distinta de una esfera, el haz de cónicas $\mathcal{H}$ es del tipo 1 o 3.

Demostración: Hay que fijarse en la base de $\mathcal{H}$: $Base(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(Q_\infty) \cap \mathcal{V}(\Omega)$, teniendo en cuenta que los puntos de $\mathcal{V}(\Omega)$ no son reales, y que, por tanto, si $P \in Base(\mathcal{H})$, también su conjugado complejo $\overline{P} \in Base(\mathcal{H})$ y $\overline{P} \neq P$. Por ello podemos afirmar que hay un número par de puntos base: 2 o 4. Del mismo modo, si $P \in F(\mathcal{H}) \cap Base(\mathcal{H})$, entonces $\mathrm{pol}_\Omega(P) = \mathrm{pol}_{Q_\infty}(P)$, lo que implica, aplicando la conjugación compleja que $\mathrm{pol}_\Omega(\overline{P}) = \mathrm{pol}_{Q_\infty}(\overline{P})$, de donde se deduce que $\mathcal{H}$ no es del tipo 4, que tiene un único punto fundamental y base. □

Definición 9.1.4.– Se dice que Q es una *cuádrica de revolución* de $\mathbb{R}^3$ si, Q es una esfera, o bien Q_∞ y Ω definen un haz de bitangentes.

Más adelante justificaremos esta definición. Volvemos ahora al caso general de $\mathbb{R}^n$.

9.2 Hiperplanos principales de las hipercuádricas.

Definición 9.2.1.– Sea Q una hipercuádrica de $\mathbb{R}^n$ distinta de una esfera, se llaman *direcciones principales* de Q a los puntos del conjunto $F(\mathcal{H}(Q_\infty, \Omega)) \setminus \mathrm{Sing}(Q_\infty) \subset H$. En el caso de la esfera, todas las direcciones son principales. Se llaman *hiperplanos principales* de Q (*ejes* en dimensión 2) a los hiperplanos afines $k^n \cap \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P)$, para cada P dirección principal.

Nota 9.2.2.– Las direcciones principales se obtienen fácilmente, sin más que observar que, si Q viene dada por la ecuación $YAY^t = 0$, entonces $P \in H$ es una dirección principal si y sólo si $\mathrm{pol}_\Omega(\overline{P}) = \mathrm{pol}_{Q_\infty}(\overline{P})$, que equivale a $PA_0 = \lambda PI$, con $\lambda \neq 0$, es decir si y sólo si P es un autovector de A_0 asociado a un autovalor no nulo de A_0.

Nota 9.2.3.– Los hiperplanos principales son siempre diametrales y, por tanto, contienen a la variedad de centros. De hecho, son hiperplanos de simetría de $\mathcal{V}_a(Q)$, como lo justifica la siguiente

Proposición 9.2.4.– Sea Q una hipercuádrica de $\mathbb{R}^n$, L un hiperplano principal y $r \perp L$ una recta que corta a $\mathcal{V}_a(Q)$ en dos puntos distintos P_1 y P_2. Entonces $r \cap L$ es el punto medio de $\overline{P_1P_2}$.

Demostración: Igual que cuando estudiábamos el centro (ver ??), se trata de considerar en $\overline{r}$ la involución de puntos conjugados respecto de $\overline{Q}$. Por ser $r \perp L$, se tiene que $L_\infty = \mathrm{pol}_\Omega(r_\infty)$. Por ser L un hiperplano principal, ser tiene que $\overline{L} = \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P)$ para cierta dirección principal P, es decir con $\mathrm{pol}_\Omega(P) = \mathrm{pol}_{Q_\infty}(P)$. Luego

$$\mathrm{pol}_\Omega(r_\infty) = L_\infty = \overline{L} \cap H = \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P) \cap H = \mathrm{pol}_{Q_\infty}(P) = \mathrm{pol}_\Omega(P),$$

por tanto, $P = r_\infty$, con lo que $\overline{L} = \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(r_\infty)$.

Así la involución de puntos conjugados respecto de $\overline{Q}$, $f : \overline{r} \to \overline{r}$, deja fijos a P_1 y P_2 y

$$f(r_\infty) = \mathrm{pol}_{\overline{Q}_{|\overline{r}}}(r_\infty) = \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(r_\infty) \cap \overline{r} = \overline{L} \cap \overline{r} = L \cap r,$$

por lo que $|P_1, P_2, L \cap r, r_\infty| = -1$, lo que quiere decir que $L \cap r$ es el punto medio de $\overline{P_1P_2}$. □

Nota 9.2.5.– Los ejes de una circunferencia son, por definición, todos sus diámetros. En el caso de una elipse (que no sea circunferencia) o de una hipérbola, de ecuación $YAY^t = 0$, se tiene que A_0 es una matriz simétrica real 2×2 con dos autovalores no nulos distintos, que corresponden a 2 direcciones principales, y por tanto hay dos ejes distintos (¡perpendiculares!). En el caso parábola hay una única dirección principal P_0', pues hay un único autovalor no nulo, que corresponde a la dirección ortogonal a $P_0 = \mathcal{V}(Q_\infty) = \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(H)$ ya que, por definición $\mathrm{pol}_\Omega(P_0') = \mathrm{pol}_{Q_\infty}(P_0')$ que es P_0, por ser $P_0 = \mathrm{Sing}(Q_\infty)$, y por tanto $P_0' = \mathrm{pol}_\Omega(P_0)$. En suma la parábola tiene un único eje que es $\mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P_0') \cap \mathbb{R}^2$.

Nota 9.2.6.– Los planos principales de una esfera son, por definición, todos sus planos diametrales.
En los casos de elipsoides (no de esferas) o de hiperboloides que no sean de revolución, el haz $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q_\infty, \Omega)$ es de tipo 1, con una base formada por cuatro puntos imaginarios $P_1, \overline{P_1}, P_2, \overline{P_2}$, y tendrá tres puntos fundamentales (reales): $P_0 = P_1\overline{P_1} \cap P_2\overline{P_2}$, $P_0' = P_1\overline{P_2} \cap P_2\overline{P_1}$ y $P_0'' = P_1P_2 \cap \overline{P_1}\,\overline{P_2}$. En los casos citados, habrá por ello tres planos diametrales (¡perpendiculares dos a dos!), que son $\mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P_0) \cap \mathbb{R}^3$, $\mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P_0') \cap \mathbb{R}^3$ y $\mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P_0'') \cap \mathbb{R}^3$, que pasan por el centro.
En los casos de paraboloides que no sean de revolución, habrá sólo dos planos principales, porque el tercero correspondería al punto de tangencia como dirección principal, cuya polar respecto de $\overline{Q}$ es H.

Definición 9.2.7.– Se llaman *ejes* de una cuádrica la intersección de dos planos principales. (Atención: ¡no confundir con ejes de una cónica!)

Nota 9.2.8.– En el caso de las cuádricas de revolución el haz $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q_\infty, \Omega)$ de cónicas de H es del tipo 3. Por tanto, hay una infinidad (toda una recta L) de direcciones principales, cuyas polares respecto de $\overline{Q}$ producen todo un haz de planos principales que pasan por una recta ($\mathrm{pol}_{\overline{Q}}(L) \cap \mathbb{R}^3$), llamada *eje de revolución* de la cuádrica. En los casos elipsoides e hiperboloides hay un plano principal más, correspondiente al punto fundamental P_0 restante. En el caso del paraboloide elíptico de revolución (¡el paraboloide hiperbólico nunca es de revolución!), no hay más planos principales, porque el otro punto fundamental P_0 de $\mathcal{H}$ es el de tangencia de $\overline{Q}$ con H.

Proposición 9.2.9.– Una cuádrica Q de $\mathbb{R}^3$, de ecuación $YAY^t = 0$ es de revolución si y sólo si la submatriz A_0 tiene un autovalor doble.

DEMOSTRACIÓN: El caso de la esfera corresponde a un autovalor triple de A_0. En otro caso, el haz $\mathcal{H}$ será de cónicas bitangentes, que se caracteriza por tener una cónica de rango 1, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{rango}(\lambda I - A_0) = 1$, que corresponde al caso de autovalores dobles de A_0. □

Ejercicio 1.–

1. Si Q es una cuádrica de $\mathbb{R}^3$ que no es de revolución y la base de $\mathcal{H}$ es $\{P_1, P_2, \overline{P_1}, \overline{P_2}\}$, entonces los planos paralelos de dirección $P_1\overline{P_1}$ (¡real!) o $P_2\overline{P_2}$ (¡real!), producen secciones circulares en $\mathcal{V}_a(Q)$.

2. Si Q es una cuádrica de $\mathbb{R}^3$ de revolución y la base de $\mathcal{H}$ es $\{P_1, \overline{P_1}\}$, entonces los planos paralelos de dirección $P_1\overline{P_1}$ producen secciones circulares en $\mathcal{V}_a(Q)$.

9.3 Focos de las cónicas reales no degeneradas.

Sea Q una cónica afín no degenerada en $\mathbb{R}^2$, es decir una elipse, hipérbola o parábola. Por tanto $\overline{Q}$ es una cónica real no degenerada de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Se puede hablar así de $\overline{Q}^*$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$, que es también una cónica real no degenerada. En este caso Ω es la hipercuádrica de la recta del infinito H de ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 0$, luego $\mathcal{V}(\Omega) = \{P_0, \overline{P_0}\}$, con $P_0 = (0 : 1 : i)$, que se llaman *puntos cíclicos* del plano, al ser los puntos por donde pasan todas las circunferencias ($Q_\infty = \Omega$). Definimos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$ la cónica degenerada de ecuación $u_1^2 + u_2^2 = 0$, que notamos por Ω^*, ya que $\mathcal{V}(\Omega^*)$ está formado por la unión de las rectas duales de los puntos cíclicos: $*(P_0)$ y $*(\overline{P_0})$.

Así en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$ hay un haz $\mathcal{H}^*$ definido por $\overline{Q}^*$ y por Ω^*.

Ejercicio 2.– Sean P y r un punto y una recta, respectivamente, de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Probar que $r = \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P)$ si y sólo si $*(r) = \mathrm{pol}_{\overline{Q}^*}(*(P))$.

Definición 9.3.1.– Se llaman *focos* de la cónica Q a los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuyos duales son rectas de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$ del lugar de una cónica degenerada del haz $\mathcal{H}^*$.

Figure 1: Caso Circunferencia

Figure 2: Caso Parábola

9.3.1 Caso circunferencia.

En este caso los puntos cíclicos $P_0, \overline{P_0}$ están en $\mathcal{V}(\overline{Q})$, por tanto $*(P_0)$ y $*(\overline{P_0})$ son tangentes a $\overline{Q}^*$, por lo que $\mathcal{H}^*$ es un haz de cónicas bitangentes. Hay dos puntos base P_1 y $\overline{P_1}$. La recta $P_1\overline{P_1}$ (real) de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$ es la dual del único foco F de la circunferencia.

Ejercicio 3.– Usando el ejercicio anterior, probar que el foco F de la circunferencia coincide con su centro.

9.3.2 Caso parábola.

Suponemos que $\overline{Q}$ es tangente a H en el punto A. Al revés que antes, $*(P_0)$ y $*(\overline{P_0})$ no son tangentes a $\overline{Q}^*$, pero $*(H) = *(P_0) \cap *(\overline{P_0})$ está en $\mathcal{V}(\overline{Q}^*)$, porque H es tangente a $\overline{Q}$. Además $*(A)$ es tangente a $\overline{Q}^*$. Por tanto $\mathcal{H}^*$ es un haz de cónicas del tipo 2, con tres puntos base: $\{P_1, \overline{P_1}, *(H)\}$. La recta $P_1\overline{P_1}$ (real) de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$ es la dual del único foco F de la parábola.

9.3.3 Caso elipse (no circunferencia) e hipérbola.

En este caso $*(P_0)$ y $*(\overline{P_0})$ no son tangentes a $\overline{Q}^*$, y $*(H) = *(P_0) \cap *(\overline{P_0})$ no está en $\mathcal{V}(\overline{Q}^*)$. Por tanto $\mathcal{H}^*$ es un haz de cónicas del tipo 1, con cuatro puntos base: $\{P_1, \overline{P_1}, P_2, \overline{P_2}\}$. Las rectas reales $P_1\overline{P_1}$ y $P_2\overline{P_2}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$ son las duales de sendos puntos F_1 y F_2 de $\mathbb{R}^2$, que son focos de la elipse o hipérbola Q. En algunos textos también se llaman, en este caso, *focos imaginarios* a los puntos (imaginarios) duales de las rectas $P_1\overline{P_2}$ y $P_2\overline{P_1}$.

Figure 3: Caso Elipse

Proposición 9.3.2.– Los focos de una cónica real no degenerada Q de $\mathbb{R}^2$ son los puntos de corte de rectas tangentes a Q y autoperpendiculares.

DEMOSTRACIÓN: Una recta de dirección (α, β) es autoperpendicular si y sólo si $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, es decir si $(0 : \alpha : \beta) \in \mathcal{V}(\Omega)$, o bien, es un punto cíclico. Por tanto las rectas autoperpendiculares son las que pasan por los puntos cíclicos, y son siempre imaginarias.

Con la notación previa, sea $F = *(P_1\overline{P_1}) = *(P_1) \cap *(\overline{P_1})$. Como P_1 y $\overline{P_1}$ son puntos de $\mathcal{V}(\overline{Q}^*)$, entonces $*(P_1)$ y $*(\overline{P_1})$ son rectas tangentes a $\overline{Q}$. Y como $P_1 \in *(P_0)$, entonces $P_0 \in *(P_1)$, que implica que es una recta autoperpendicular. $\square$

Ejemplo 9.3.3.– Consideremos respecto del sistema de referencia canónico, la cónica afín Q definida por la ecuación $y^2 = 2px$ con p un número real no nulo, o bien $YAY^t = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular el foco de Q veamos cuáles son las cónicas degeneradas (en el plano dual) del haz definido (en el plano dual) por

$$A^{-1} = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $\det(\lambda A^{-1} + \mu B) = \lambda^2(\mu - p\lambda)$. Así, las cónicas degeneradas corresponden a $\lambda = 0$ y $\mu = p\lambda$. En el primer caso, la cónica es Ω^* cuyo lugar es la reunión de las rectas (en el plano dual) $u_1 + iu_2 = 0$ y $u_1 - iu_2 = 0$. Los duales de estas rectas son puntos en la recta del infinito de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ y no definen focos de Q. En el segundo caso, la cónica (en el plano dual) está definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la reunión de las dos rectas $u_1 = 0$ y $2u_0 + pu_1 = 0$. El dual de la primera recta es un punto en el infinito y no define un foco de Q. El dual de la segunda es el punto $(1 : p/2 : 0)$ que representa al único foco $(p/2, 0)$ de la parábola Q.

Ejemplo 9.3.4.– Consideremos respecto del sistema de referencia canónico, la cónica afín Q definida por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con a, b números positivos, y $a \geq b$ o bien $YAY^t = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Para calcular los focos de Q veamos cuáles son las cónicas degeneradas (en el plano dual) del haz definido (en el plano dual) por

$$A^{-1} = c \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $\det(\lambda A^{-1} + \mu B) = -\lambda(\mu + a^2\lambda)(\mu + b^2\lambda)$. Así, las cónicas degeneradas corresponden a $\lambda = 0$, $\mu = -a^2\lambda$ y $\mu = -b^2\lambda$. En el primer caso, la cónica es Ω^* cuyo lugar es la reunión de las rectas (en el plano dual) $u_1 + iu_2 = 0$ y $u_1 - iu_2 = 0$. Los duales de estas rectas son puntos en la recta del infinito de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ y no definen focos de Q. En el segundo caso, la cónica (en el plano dual) está definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

que es la reunión de las dos rectas imaginarias, que definen a los focos imaginarios. En el tercer caso $\mu = -b^2\lambda$, la cónica (en el plano dual) está definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la reunión de las dos rectas reales, cuyos duales son los focos $F_1 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ y $F_2 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ de Q.

Ejemplo 9.3.5.– Los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con a, b números positivos, son $F_1 = (\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ y $F_2 = (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.