Tema 12.- Aplicaciones multilineales. Producto tensorial de módulos

12.1 Aplicaciones multilineales

En lo que sigue, A denotará un anillo y M, N, P unos A-módulos.

Definición 12.1.1.– Diremos que una aplicación $\varphi : M \times N \to P$ es *bilineal* si es lineal en cada componente, i.e. si para cada $m \in M$ (resp. para cada $n \in N$) la aplicación

$$y \in N \mapsto \varphi(m, y) \in P \qquad (\text{resp. } x \in M \mapsto \varphi(x, n) \in P\ )$$

es lineal.
Al conjunto de las aplicaciones bilineales de $M \times N$ en P lo notaremos por $\mathrm{Bil}_A(M, N; P)$.

Lema 12.1.2.– El conjunto $\mathrm{Bil}_A(M, N; P)$ tiene una estructura natural de A-módulo. Además:

1. La composición de una aplicación lineal $h : P \to Q$ con una bilineal $\varphi : M \times N \to P$ es bilineal y la aplicación

   $$\varphi \in \mathrm{Bil}_A(M, N; P) \to h \circ \varphi \in \mathrm{Bil}_A(M, N; Q)$$

   es lineal.

2. Si $f : M \to M', g : N \to N'$ son aplicaciones lineales entre A-módulos y $\psi : M' \times N' \to P$ es una aplicación bilineal, entonces la aplicación $\psi \circ (f \times g) : M \times N \to P$ es bilineal, donde $f \times g : M \times N \to M' \times N'$ está definida por: $(f \times g)(m, n) = (f(m), g(n))$.

Proposición 12.1.3.– La aplicación

$$\varphi \in \mathrm{Bil}_A(M, N; P) \mapsto F \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$$

definida por: $F(m)(n) = \varphi(m, n)$ para cada $n \in N$ y cada $m \in M$, es un isomorfismo de A-módulos.

12.2 Producto tensorial de módulos

Definición 12.2.1.– Un *producto tensorial* de M y N (sobre A) es un A-módulo T y una aplicación bilineal $\mu : M \times N \to T$ tal que se verifica la siguiente propiedad universal: para cada A-módulo P y cada aplicación bilineal $\varphi : M \times N \to P$ existe una única aplicación lineal $h : T \to P$ tal que $\varphi = h \circ \mu$.

Si $\mu : M \times N \to T$ es un producto tensorial de M y de N, se tiene que para cada A-módulo P, la aplicación

$$h \in \mathrm{Hom}_A(T, P) \mapsto h \circ \mu \in \mathrm{Bil}_A(M, N; P)$$

es un isomorfismo de A-módulos.

Proposición 12.2.2.– *(Unicidad del producto tensorial)* Si $\mu : M \times N \to T, \mu' : M \times N \to T'$ son dos productos tensoriales de M y N, entonces existe un único isomorfismo $f : T \to T'$ tal que $f \circ \mu = \mu'$.

Construcción de módulos libres: Dado un conjunto arbitrario no vacío I, definimos $A^{(I)}$ como el conjunto de familias de elementos de A indicadas por I, $\{a_i\}_{i \in I}$, tales que $a_i = 0$ para todos los elementos de I salvo para un subconjunto finito[1]. Dado un elemento $\underline{a} = \{a_i\}_{i \in I} \in A^{(I)}$, notaremos $\mathrm{sop}(\underline{a}) = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$.
Si $\underline{a}, \underline{b}$ son dos elementos de $A^{(I)}$, su suma está definida por $\underline{a} + \underline{b} := \underline{c}$, con $c_i = a_i + b_i$ para cada $i \in I$. Es claro que $\underline{c}$ es de nuevo un elemento de $A^{(I)}$ (de hecho $\mathrm{sop}(\underline{c}) \subset \mathrm{sop}(\underline{a}) \cup \mathrm{sop}(\underline{b})$).
Si $a \in A$, definimos $a \cdot \underline{a} = \underline{d}$ como $d_i = aa_i$ para cada $i \in I$. Es claro también que $\underline{d}$ es de nuevo en elemento de $A^{(I)}$ (de hecho $\mathrm{sop}(\underline{cd}) \subset \mathrm{sop}(\underline{a})$).
Se demuestra fácilmente que con estas operaciones $A^{(I)}$ es un A-módulo.
Para cada $j \in I$, notaremos $\underline{a}^j$ el elemento de $A^{(I)}$ definido por $a_i^i = 1$ y $a_i^j = 0$ si $i \neq j$.

Proposición 12.2.3.– Con las notaciones anteriores, el conjunto $\{\underline{a}^j\}_{j \in I}$ es una base del A-módulo $A^{(I)}$, y por tanto dicho módulo es libre.

Proposición 12.2.4.– *(Existencia del producto tensorial)* Dados dos A-módulos M y N, existe su producto tensorial.

Definición 12.2.5.– Dados dos módulos M y N, notaremos por $M \otimes_A N$ a su producto tensorial, y si $\mu : M \times N \to M \otimes_A N$ es la aplicación bilineal correspondiente, para cada $m \in M$ y cada $n \in N$ escribiremos $m \otimes n := \mu(m, n)$.

De la demostración de la existencia del producto tensorial se deduce que $M \otimes_A N$ está generado como A-módulo por los $m \times n$ cuando m recorre un conjunto de generadores de M y n recorre un conjunto de generadores de N. En particular, si M y N son finitamente generados, entonces su producto tensorial también es finitamente generado.

Proposición 12.2.6.– Dados unos A-módulos M, N, P se tienen unos isomorfismos canónicos:

$$M \otimes N \simeq N \otimes M, \quad m \otimes n \leftrightarrow n \otimes m$$

$$(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P), \quad (m \otimes n) \otimes p \leftrightarrow m \otimes (n \otimes p)$$

$$(M \times N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \times (N \otimes P), \quad (m, n) \otimes p \leftrightarrow (m \otimes p, n \otimes p)$$

$$A \otimes_A M \simeq M, \quad a \otimes m \leftrightarrow m.$$

[1]Cuando el conjunto I es finito, esta condición es vacía.

PROPOSICIÓN 12.2.7.– Dadas unas aplicaciones lineales entre A-módulos, $f : M \to M', g : N \to N'$, existe una única aplicación lineal $M \otimes N \to M' \otimes N'$, que notaremos $f \otimes g$, tal que $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ para cada $m \in M$ y cada $n \in N$.
Además, se verifican las siguientes relaciones: $\mathrm{Id}_M \otimes \mathrm{Id}_N = \mathrm{Id}_{M \otimes N}$, $(f \circ f') \otimes (g \circ g') = (f \otimes g) \circ (f' \otimes g')$, $0 \otimes g = 0$, $f \otimes 0 = 0$.

PROPOSICIÓN 12.2.8.– Si

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos, para cada A-módulo N, la sucesión

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes N \to 0$$

también es exacta.

DEFINICIÓN 12.2.9.– Diremos que un A-módulo es *plano*, si para cada aplicación lineal inyectiva $f : M' \to M$, la aplicación $f \otimes \mathrm{Id}_N$ también es inyectiva.

EJEMPLO 12.2.10.– Tomemos $A = \mathbb{Z}$, $M' = M = \mathbb{Z}$, $f : M' \to M$ dado por $f(x) = 2x$ y $N = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$. La aplicación lineal f es inyectiva y sin embargo $M' \otimes_{\mathbb{Z}} N = M \otimes_{\mathbb{Z}} N \simeq N \neq 0$ y $f \otimes \mathrm{Id}_N = 0$, por lo que $f \otimes \mathrm{Id}_N$ no es inyectiva y N no es plano.
Todo módulo libre es plano.

12.3 Álgebras

En lo que sigue A denotará un anillo.

DEFINICIÓN 12.3.1.– Una A-*álgebra* es un anillo B dotado de un homomorfismo de anillos $\rho : A \to B$.

DEFINICIÓN 12.3.2.– Si $(B, \rho), (C, \sigma)$ son dos A-álgebras, un homoorfismo de A-algebras de (B, ρ) en (C, σ) es un homomorfismo de anillos $f : B \to C$ tal que $f \circ \rho = \sigma$.

Un homomorfismo de A-álgebras es homomorfismo de A-módulos.

Toda A-álgebra (B, ρ) da lugar a una estructura de A-módulo sobre B, donde la estructura de grupo abeliano es la estructura aditiva del anillo B y el producto por escalares viene dado por:

$$(a, b) \in A \times B \mapsto a \cdot b := \rho(a)b \in B.$$

Recíprocamente, si B es un anillo que posee una estructura de A-módulo con la misma suma que la del anillo y verificando $a \cdot (bb') = (a \cdot b)b' = b(a \cdot b')$ para cada $a \in A$ y cada $b, b' \in B$, podemos definir

$$\rho : a \in A \mapsto a \cdot 1_B \in B$$

que resulta ser un homomorfismo de anillos.

Proposición 12.3.3.– Dadas dos A-álgebras (B,ρ) y (C,σ), sobre el producto tensorial (como A-módulos) $B\otimes_A C$ podemos definir una "multiplicación" única tal que $(b\otimes c)\cdot(b'\otimes c')=(bb')\otimes(cc')$ y de manera que $B\otimes_A C$ es un anillo y la aplicación:

$$a\in A\mapsto \rho(a)\otimes 1=1\otimes\sigma(a)\in B\otimes_A C$$

es un homomorfismo de anillos.

Al anillo $B\otimes_A C$ de la proposición anterior, dotado del homomorfismo $A\to B\otimes_A C$, lo denominamos *producto tensorial de las A-álgebras B y C*. Se tienen unos homomorfismos de A-álgebras:

$$b\in B\mapsto b\otimes 1\in B\otimes_A C,\quad c\in C\mapsto 1\otimes c\in B\otimes_A C.$$