Ejercicios de Algebra III. Curso 00-01

EJERCICIO 1.– Sea x un elemento nilpotente de un anillo A. Probar que $1+x$ es una unidad de A. Deducir que la suma de un elemento nilpotente y de una unidad es una unidad.

EJERCICIO 2.– Sea A un anillo y $A[X]$ el anillo de polinomios en una indeterminada X con coeficientes en A. Sea $f = a_0 + a_1X + \ldots a_nX^n \in A[X]$. Probar que:

1. f es una unidad en $A[X] \iff a_0$ es una unidad en en A y $a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes. [Ayuda: si $b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$ es el inverso de f, probar por inducción en r que $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. Luego probar que a_n es nilpotente y utilizar el ejercicio 1]

2. f es nilpotente $\iff a_0, a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes.

3. f es un divisor de cero $\iff$ existe $a \neq 0$ en A tal que $af = 0$ [Ayuda: Elegir un polinomio $g = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$ de grado mínimo tal que $fg = 0$. Entonces $a_nb_m = 0$, luego $a_ng = 0$ (porque a_ng anula f y tiene grado menor que m). Ahora probar por inducción que $a_{n-r}g = 0 (0 \leq r \leq n)$.]

4. f se dice primitivo si $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (1)$. Probar que si $f, g \in A[X]$, entonces fg primitivo $\iff f$ y g lo son.

EJERCICIO 3.– generalizar los resultados del ejercicio 2 a un anillo de polinomios $A[X_1, \ldots, X_r]$ en varias indeterminadas.

EJERCICIO 4.– En el anillo $A[X]$, el radical de Jacobson es igual al nilradical.

EJERCICIO 5.– Sea A un anillo y $A[[X]]$ el anillo de series de potencias formales $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ con coeficientes en A. Probar que

1. f es una unidad en $A[[X]] \iff a_0$ es una unidad en A.

2. Si f es nilpotente, entonces a_n es nilpotente para todo n. Es cierto el recíproco ?

3. f pertenece al radical de Jacobson de $A[[X]] \Longleftrightarrow a_0$ pertenece al radical de Jacobson de A.

4. El contraído de un ideal maximal $\mathbf{m}$ de $A[[X]]$ es un ideal maximal de de A y $\mathbf{m}$ está generado por $\mathbf{m}^c$ y por X.

5. Todo ideal primo de A es el contraído de un ideal primo de $A[[X]]$.

EJERCICIO 6.– Probar que $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m) \bigotimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n) = 0$ si m, n son primos entre sí.

EJERCICIO 7.– Sea A un anillo, $\mathbf{a}$ un ideal y M un A-módulo. Probar que $(A/\mathbf{a}) \bigotimes_A M$ es isomorfo a $M/\mathbf{a}M$.

EJERCICIO 8.– Sea A un dominio de integridad y M un A-módulo. Un elemento $x \in M$ es de <u>torsión</u> si $Ann(x) \neq 0$, es decir, si existe algún elemento $a \in A$ no nulo tal que $ax = 0$. Denotamos $T(M)$ al conjunto de elementos de M que son de torsión. Probar que:

1. $T(M)$ submódulo.

2. $T(M/T(M)) = 0$.

3. Si $f : M \longrightarrow N$ homomorfismo de A-módulos, $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

4. Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ es una sucesión exacta de A-módulos, entonces $0 \longrightarrow T(M') \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M'')$ también.

5. Probar que T no es un funtor exacto.

EJERCICIO 9.– Para todo A-módulo M, sea $M[X]$ el conjunto de polinomios en X con coeficientes en M, es decir, expresiones de la forma

$$m_0 + m_1 X + \cdots + m_r X^r \qquad m_i \in \mathbf{m}$$

Definiendo el producto de un elemento de $A[X]$ y uno de $M[X]$ de la manera obvia, probar que $M[X]$ es un $A[X]$-módulo.
Por último, probar que $M[X] \simeq A[X] \bigotimes_A M$.

Ejercicio 10.– Sea S un subconjunto multiplicativamente cerrado de un anillo A, y sea M un A-módulo finitamente generado. Probar que $S^{-1}M = 0$ si y sólo si existe un $s \in S$ tal que $sM = 0$.

Ejercicio 11.– Sea $\mathbf{a}$ un ideal de un anillo A y sea $S = 1 + \mathbf{a}$. Probar que $S^{-1}\mathbf{a}$ está contenido en el radical de Jacobson de $S^{-1}A$.

Ejercicio 12.– Sea A un anillo, S, T dos subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y U la imagen de T en $S^{-1}A$. Probar que los anillos $(ST)^{-1}A$ y $U^{-1}(S^{-1}A)$ son isomorfos.

Ejercicio 13.– Sea k un cuerpo, $P \in k^n$ un punto y $k[\mathbf{X}] = k[X_1, \ldots, X_n]$. El conjunto siguiente se llama *anillo de funciones regulares en el punto P*

$$\mathcal{O}_P = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \ \mid \ f, g \in k[\mathbf{X}] \ , g(P) \neq 0 \right\}$$

Probar que es un anillo local y noetheriano.

Ejercicio 14.– Sea $G = \{x^4y^2 - z^5, x^3y^3 - 1, x^2y^4 - 2z\}$ ¿Es G una base de Gröbner del ideal $\langle G \rangle$ respecto del orden lexicográfico graduado? Razonar la respuesta y en caso negativo hallar una.

Ejercicio 15.– Idem para $G = \{x - z^2, y - z^3\}$.

Ejercicio 16.– Hacer los dos ejercicios anteriores para el orden lexicográfico.

Ejercicio 17.– Sea

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$$

una cadena descendente de variedades afines. Probar que existe $n \geq 1$ tal que $V_n = V_m$ para todo $m \geq n$.

Ejercicio 18.– Sea $V = \mathcal{V}(I) \subset \mathbf{C}^2$ donde $I = (x^2 - y, y + x^2 - 4)$. Probar que:
1.- $I = (x^2 - y, x^2 - 2)$.
2.- $V = \{\pm\sqrt{2}, 2)\}$.

Ejercicio 19.–

1. Probar que si $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ factoriza como $g = g_1g_2$, entonces $\mathcal{V}(f, g) = \mathcal{V}(f, g_1) \cup \mathcal{V}(f, g_2)$.

2. Probar que $\mathcal{V}(y - x^2, xz - y^2) = \mathcal{V}(y - x^2, xz - x^4)$.

3. Usando el primer apartado, describir la variedad del apartado segundo.

EJERCICIO 20.– Dado $f \in I = (f_1, \ldots, f_r) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, describir un algoritmo para encontrar $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $\sum_{i=1}^{r} f_i g_i = f$.

EJERCICIO 21.– Sea k un cuerpo, y sea $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Diremos que $f \in A$ es un *binomio* si f tiene la forma $f = a\mathbf{X}^\alpha - b\mathbf{X}^\beta$. Un ideal I de A, se dice *binomial* si admite un sistema de generadores formado por binomios.

1. Supongamos fijado un orden monomial. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

   (a) I es binomial.

   (b) La base de Gröbner reducida de I está formada por binomios.

2. Si I es binomial y f es un monomio, probar que $(I : f)$ es binomial.

EJERCICIO 22.– Sea k un cuerpo, y sea $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Si I es un ideal de A, definimos

$$(I : g^\infty) = \bigcup_{s \in \mathbf{N}} (I : g^s).$$

1. Probar que si $(I : g^s) = (I : g^{s+1})$ para cierto $s \in \mathbf{N}$, entonces

   $$(I : g^\infty) = (I : g^s).$$

   ¿Existe s verificando tal propiedad? Razonar la respuesta.

2. Sea I^e el ideal extendido de I en $k[Y, X_1, ..., X_n]$, y sea $J = I^e + (Yg - 1)$. Probar que

   $$(I : g^\infty) = J \cap A.$$

3. Describir **razonadamente** un algoritmo con entrada el polinomio g y unos generadores de I, y con salida unos generadores de $(I : g^\infty)$.

EJERCICIO 23.– Sea k un cuerpo, y sea $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Sea $f \in A$ e $I \subset A$ un ideal de A.

1. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

   (a) $f \in \sqrt{I}$.

(b) Para todo $g \in A$, existe $s \in \mathbf{N}$ tal que $f^s g \in I$.

2. Dar **razonadamente** un algoritmo con entrada f e I, y que de su salida se obtenga si $f \in \sqrt{I}$ o no.

EJERCICIO 24.– Sea k un cuerpo, y $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n \in \mathbf{Z}^d$. Si $A := k[X_1, \dots, X_n]$ y $B := k(T_1, \dots, T_d)$, consideramos

$$\Phi : A \longrightarrow B,$$

el homomorfismo de k-álgebras definido por $\Phi(X_i) = \mathbf{T}^{a_i}$.

1. Describir (**razonadamente**)un algoritmo con entrada $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, y cuya salida sea un sistema generador del ideal $I = ker(\Phi)$.

2. Cada elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}^n$ se escribe de forma única como $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$, con $\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^- \in \mathbf{N}^n$ y con soporte disjunto (el soporte de $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es el conjunto $\{i \mid v_i \neq 0\}$).

   Consideramos el $\mathbf{Z}$-módulo (o grupo abeliano) siguiente

   $$\mathcal{L} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{a}_i = 0\}.$$

   Probar que

   $$I = \langle \mathbf{X}^{u^+} - \mathbf{X}^{u^-} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{L} \rangle.$$

3. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$, definimos el ideal

   $$J_{\mathcal{C}} := \langle \mathbf{X}^{v^+} - \mathbf{X}^{v^-} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{C} \rangle.$$

   Probar que si $\mathcal{C}$ genera $\mathcal{L}$ entonces

   $$(J_{\mathcal{C}} : (X_1 \cdots X_n)^\infty) = I.$$

EJERCICIO 25.– Sean k un cuerpo, $A = k[X_1, \dots, X_n]$, $I_1, \dots, I_r \subset A$ ideales. Definimos la aplicación

$$\Phi : A \longrightarrow A/I_1 \times \cdots \times A/I_r,$$

$\Phi(f) = (f + I_1, \ldots, f + I_r)$.
1.- Demostrar que Φ es un homomorfismo de A-álgebras.
2.- Dar una condición necesaria y suficiente para que Φ sea sobreyectiva.
3.- Dar una condición necesaria y suficiente para que Φ sea inyectiva.
4.- Describir (razonadamente) un algoritmo cuya entrada sean unos generadores de los ideales $I_1, \ldots, I_r$, y como salida responda si Φ es o no sobreyectiva, inyectiva y biyectiva.

EJERCICIO 26.– Sea k un cuerpo e $I \subset k[X_1, \ldots, X_n] = k[\mathbf{X}]$ un ideal tal que $V = \mathcal{V}(I) \subset k^n$ sea una variedad afín finita de cardinal m, $V = \{P_1, \ldots, P_m\}$.

1. Probar que la aplicación
$$\varphi : k[\mathbf{X}]/I \to k^m$$
dada por $\varphi(f + I) = (f(P_1), \ldots, f(P_m))$, está bien definida y es un homomorfismo de anillos sobreyectivo.

2. Supongamos que k es algebraicamente cerrado. Probar que:
$$\varphi \quad \text{es isomorfismo} \Longleftrightarrow I \quad \text{es radical.}$$

3. Dar un contraejemplo donde se vea que la equivalencia del apartado anterior es falsa si se suprime la hipótesis k algebraicamente cerrado.

EJERCICIO 27.–

1. Sea $k \subset K$ una extensión de cuerpos. Supongamos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ son algebraicos sobre k. Probar que $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ es un cuerpo.

2. Sea $\alpha \in K$ algebraico sobre k y sea $f(X) \in k[X]$ el polinomio mínimo de α sobre k. Sea $\beta \in k[\alpha]$, $\beta = g(\alpha)$, $g(X) \in k[X]$. Dar razonadamente un procedimiento algorítmico que determine el polinomio mínimo de β sobre k a partir de los datos anteriores.

3. Sea $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal, $I \neq (1)$. Sea $\overline{k}$ el cierre algebraico de la extensión y $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{V}_{\overline{k}}(I)$, es decir $(c_1, \ldots, c_n) \in \overline{k}^n$ y $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$ para todo $f \in I$.

   Consideramos los siguientes polinomios:
   $f_1(X_1) \subset k[X_1]$ el polinomio mínimo de c_1 sobre k,

$f_i(X_1,\ldots,X_i) \in k[X_1,\ldots,X_i]$ tal que $f_i(c_1,\ldots,c_{i-1},X_i)$ es el polinomio mínimo de c_i sobre $k[c_1,\ldots,c_{i-1}]$, $2 \leq i \leq n$.

Probar que el ideal $J = (f_1,\ldots,f_n) \subset k[X_1,\ldots,X_n]$ es un ideal maximal y que $I \subset J$.

Ejercicio 28.– Sea k un cuerpo, y sean V y W dos variedades afines de k^n.
1.-Dar un ejemplo donde se vea que

$$V - W = \{P \in V \ \mid \ P \notin W\},$$

no es en general una variedad afín.
2.- Sean I, $J \in k[X_1,\ldots,X_n]$ dos ideales. Probar que

$$\overline{\mathcal{V}(I) - \mathcal{V}(J)} \subset \mathcal{V}(I : J).$$

Además, si k es algebraicamente cerrado e I es radical, se da la igualdad.
3.- Probar que $\mathcal{I}(V) : \mathcal{I}(W) = \mathcal{I}(V - W)$.

MAPLE V

Ejercicio 29.– Dado el ideal $I = (X^3 - 2XY, X^2Y - 2Y^2 + X)$, calcular bases de Gröbner de I para distintos órdenes.

Ejercicio 30.– Determinar si el polinomio f está en el ideal I para los siguientes casos:

1. $f = XY^3 - Z^2 + Y^5 - Z^3 \qquad I = (-X^3 + Y, X^2Y - Z)$
2. $f = X^3Z - 2Y^2 \qquad I = (XZ - Y, XY + 2Z^2, Y - Z)$

Ejercicio 31.– Determinar los puntos de $\mathbf{C}^3$ de la variedad V en los siguientes casos:

1. $V = (X^2 + Y^2 + Z^2 - 1, X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X, 2X - 3Y - Z)$
2. $V = (X^2Y - Z^3, 2XY - 4Z - 1, Z - Y^2, X^3 - 4XY)$

Ejercicio 32.– Decidir si $I = J$ en los siguientes casos:

1. $I = (x_1^3 - x_2x_3^5, x_1 - x_2^3x_3^3x_4^2, x_1^2 - x_2^2x_3^4x_4, x_1^4x_4 - x_3^6, x_2^4x_4^3x_3^2 - 1, x_1x_2x_4 - x_3)$
   $J = (x_1 - x_2^3x_3^3x_4^2, x_2^4x_3^2x_4^3 - 1)$

2. $I = (x_1x_2^5x_3^4 - x_4, x_1^2x_2^6x_3^5 - 1)$ $J = (x_1x_2x_3x_4 - 1, x_2^4x_3^3 - x_4^2)$

EJERCICIO 33.– Probar que los siguientes conjuntos son generadores minimales del mismo ideal. (Obsérvese que tienen distinto cardinal !!).

$$G_1 = \{x_1^2 - x_3^4x_4^2, x_2 - x_4^3x_3^8, 1 - x_3^8x_4^4\}$$

$$G_2 = \{1 - x_2x_4, 1 - x_1^4, x_3^8 - x_1^8x_2^4, x_3^{12} - x_1^{10}x_2^6\}$$

EJERCICIO 34.– Calcular unas ecuaciones implícitas de las siguientes variedades dadas en paramétricas:

$$V_1 : \left\{ \begin{array}{rl} x = & t^4 \\ y = & t^3 \\ z = & t^2 \end{array} \right. \quad V_2 : \left\{ \begin{array}{rl} x = & t+u \\ y = & t^2+2tu \\ z = & t^3+3t^2u \end{array} \right. \quad V_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x = & \frac{u^2}{v} \\ y = & \frac{v^2}{u} \\ z = & u \end{array} \right.$$

EJERCICIO 35.– Consideremos los polinomios

$$f = x^4 + x^3y + x^3z^2 - x^2y^2 + x^2yz^2 - xy^3 - xy^2z^2 - y^3z^2$$

$$g = x^4 + 2x^3z^2 - x^2y^2 + x^2z^4 - 2xy^2z^2 - y^2z^4$$

1. Calcular unos generadores de $(f) \cap (g)$ y de $\sqrt{(f)(g)}$.
2. Calcular el máximo común divisor de f y g.
3. Sea $p = x^2+xy+xz+yz$ y $q = x^2-xy-xz+yz$, calcular $(f,g) \cap (p,q)$

EJERCICIO 36.– Describir la topología de Zariski de $\mathrm{Spec}(A)$ siendo $A = \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}[X], \mathbf{R}[\mathbf{X}], \mathbf{Z}[X]$.

EJERCICIO 37.– Sean $A \subset B$ anillos, C la clausura entera de A en B, y S un subconjunto multiplicativamente cerrado de A. Probar que $S^{-1}C$ es la clausura entera de $S^{-1}A$ en $S^{-1}B$.

Nota.- A partir de ahora consideraremos k un cuerpo infinito.

EJERCICIO 38.– Un orden monomial se dirá graduado si

$$|\alpha| < |\beta| \Rightarrow \alpha < \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$$

1. Si $<$ es un orden monomial en $k[Y_1,\dots,Y_n]=k[\mathbf{Y}]$, en $k[X_0,\dots,X_n]$ definimos $<_h$ como sigue:
$$(\alpha_0,\alpha)<_h(\beta_0,\beta)\Longleftrightarrow\begin{cases}\alpha<\beta\\ \text{ó}\\ \alpha=\beta\text{ y }\alpha_0<\beta_0\end{cases}$$
Probar que $<_h$ es un orden monomial.
2. Probar que si $<$ es un orden monomial graduado, entonces
$$(0,\exp_<(f))=\exp_{<_h}(H(f)),\text{para todo } f\in k[\mathbf{Y}].$$
3. Si $I\subset k[\mathbf{Y}]$ es un ideal y $G=\{g_1,\dots,g_s\}$ es una base de Grobner de I para un orden monomial graduado $<$, probar que entonces
$$H(G)=\{H(g_1),\dots,H(g_s)\}$$
es una base de Grobner de I^h respecto de $<_h$.
En particular $I^h=(H(g_1),\dots,H(g_s))$.
4. Calcular I^h siendo $I=(Y_2-Y_1^2,Y_3-Y_1^3)$.

Ejercicio 39.– Una curva monomial en $\mathbf{A}^n(k)$ es la variedad afín V definida por las paramétricas $X_i=t^{a_i}$, donde $a_i\in\mathbf{N}$, $1\le i\le n$.

1. Sea
$$\Phi:k[X_0,X_1,X_2,X_3]\to k[S,T]$$
el homomorfismo de k-álgebras definido por $\Phi(X_0)=S^5$, $\Phi(X_1)=S^2T^3$, $\Phi(X_2)=S^3T^2$, $\Phi(X_3)=T^5$. Calcular $I=\ker(\Phi)$ usando como dato que una base de Grobner del ideal
$$J=(X_0-S^5,X_1-S^2T^3,X_2-S^3T^2,X_3-T^5)\subset k[S,T,X_0,X_1,X_2,X_3]$$
respecto del orden lexicográfico es á
$$G=\{S^5-X_0,S^3T^2-X_2,S^2T^3-X_1,S^2X_2-T^2X_0,$$
$$S^2-T^2X_1,ST^4X_0-X_2^2,ST^4X_2-X_1^2,SX_1-TX_2,$$
$$SX_2^2-TX_1,SX_2X_3-X_1^2T,T^5-X_3,X_0X_1^2-X_2^3,$$
$$X_0X_3-X_1X_2,X_1^3-X_2^2X_3\}.$$

2. Sea $W = \mathcal{V}_p(I) \subset \mathbf{P}^3$. Probar que $\overline{V} = W$, donde V es la curva monomial de $\mathbf{A}^3$ dada por las paramétricas $\{(t^3, t^2, t^5) \mid t \in k\}$.

3. ¿Es $\mathcal{I}_p(W) = I$? Razonar la respuesta.

4. Calcular **razonadamente** unas ecuaciones de W y otras de V.

Ejercicio 40.– Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$, consideramos la curva monomial $V \subset \mathbf{A}^n$ definida por las paramétricas $Y_i = t^{a_i}$, $1 \leq i \leq n$, $t \in k$.

1. Probar que el siguiente algoritmo es **correcto**.
   Algoritmo:
   Entrada: $a_1, \ldots, a_n$.
   Salida: Unas ecuaciones implícitas de V.
   1.- Considerar el ideal J de $k[S, T, X_0, X_1, \ldots, X_n]$ generado por los polinomios
   $$X_0 - S^r, \quad X_i - S^{r-a_i}T^{a_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$
   donde $r = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i)$.
   2.- Calcular una base de Gröbner de J respecto del orden lexicográfico, G.
   3.- Determinar $F = G \cap k[X_0, \ldots, X_n] = \{f_1, \ldots, f_d\}$.
   4.- Dar como salida $D(F) = \{D(f_1), \ldots, D(f_d)\}$.

2. Usando la notación del algoritmo anterior, probar que $\mathcal{I}_p(\overline{V}) = J \cap k[X_0, \ldots, X_n]$.

3. Supongamos que $n = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ y $a_3 = 7$. Sea
   $$A := k[X_0, X_1, X_2, X_3]/\mathcal{I}_p(\overline{V}).$$
   Determinar **razonadamente** dos elementos α, $\beta \in A$, tales que sean algebraicamente independientes sobre k y $k[\alpha, \beta] \subset A$ sea una extensión entera.

Ejercicio 41.– Sea k un cuerpo infinito, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$ enteros positivos, y
$$\Phi : k[X_0, X_1, \ldots, X_n] \to k[S, T]$$
el homomorfismo de k-álgebras definido por $\Phi(X_0) = S^r$, $\Phi(X_i) = S^{r-a_i}T^{a_i}$, $1 \leq i \leq n$, donde $r = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i)$.

1. Probar que $I = \ker(\Phi)$ es un ideal homogéneo.

2. Sea $W = \mathcal{V}_p(I) \subset \mathbf{P}^n$. Probar que $\overline{V} = W$, donde V es la curva monomial de $\mathbf{A}^n$ dada por las paramétricas $\{(t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}) \mid t \in k\}$.

3. Probar que $\mathcal{I}_p(W) = I$.

4. Describir razonadamente un algoritmo con entrada $a_1, \ldots, a_n$, y con salida unas ecuaciones de W y otras de V.

5. Sea
$$A := k[X_0, \ldots, X_n]/I.$$
Determinar dos elementos α, $\beta \in A$, tales que sean algebraicamente independientes sobre k y $k[\alpha, \beta] \subset A$ sea una extensión entera. Razonar la respuesta.

EJERCICIO 42.– Sean A y B dos anillos graduados, $A = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} A_n$, y $B = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} B_n$. Un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$ se dice graduado si existe $p \in \mathbf{Z}$ tal que $f(A_n) \subset B_{n+p}$ para todo $n \in \mathbf{Z}$. En este caso, se dirá que f es de grado p.

1. Probar que si f es graduado, entonces $\ker(f)$ es un ideal homogéneo de A, y que $\mathrm{im}(f)$ es un subanillo graduado de B.

2. Sea k un cuerpo infinito, $V \subset \mathbf{A}^n$ una curva monomial, y $\overline{V} \subset \mathbf{P}^n$ su clausura proyectiva. Describir dos homomorfismos graduados de grado 0, φ y Φ, cuyos núcleos sean respectivamente $\mathcal{I}(V)$ y $\mathcal{I}_p(\overline{V})$. Razonar la respuesta.

EJERCICIO 43.– Sea k $\Phi : k[Y_1, \ldots, Y_n] \longrightarrow k(T_1, \ldots, T_m)$ el homomorfismo de k-álgebras definido por $\Phi(Y_i) = \frac{f_i}{g_i}$, donde f_i y g_i son **monomios** en las variables $T_1, \ldots, T_m$. Sea $V = \mathcal{V}(ker\Phi) \subset \mathbf{A}^n$.

1. Definir un homomorfismo de k-álgebras
$$\widetilde{\Phi} : k[X_0, X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k[T_0, T_1, \ldots, T_m],$$
de forma que el ideal $ker(\widetilde{\Phi})$ sea homogéneo, y $\overline{V} = \mathcal{V}_p(ker(\widetilde{\Phi})) \subset \mathbf{P}^n$. Razonar la respuesta.

2. Supongamos $m \leq n$. Dar un ejemplo concreto de una variedad V con dimension d, para $d = 1, \ldots, m$ ¿Podría ser la dimensión de V superior a m? Razonar la respuesta.

EJERCICIO 44.– Sea A un anillo no nulo. Probar que son equivalentes:

1. A s un anillo reducido ($N(A) = (0)$) con sólo un número finito de ideales primos minimales y $dim(A) = 0$.

2. A es isomorfo a un producto cartesiano de un número finito de cuerpos.

EJERCICIO 45.– Sea $I = (x(x-y), (y-1)(x-y)) \subset k[x,y]$ y consideremos $A = k[x,y]/I$. Encontrar dos cadenas de primos de A saturadas y de distinta longitud. Razonar la respuesta e interpretar geométricamente el resultado.

EJERCICIO 46.– Calcular las componentes irreducibles de $\mathcal{V}(I)$ en cada uno de los siguientes casos

1. $I = (x^5, x^4yz, x^3z) \subset k[x,y,z]$

2. $I = (wx^2y, xyz^3, wz^5) \subset k[w,x,y,z]$

3. $I = (x_1x_2, x_3 \ldots x_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$

EJERCICIO 47.– (Principio de inclusión-exclusión) Notaremos $|A|$ el número de elementos de un conjunto finito A.

1. Probar que para todo par de conjuntos finitos A, B se tiene
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

2. Probar que para cada tres conjuntos finitos A, B, C se tiene
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

3. Por inducción sobre el número de conjuntos, probar que el cardinal de una unión de n conjuntos finitos $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es igual a la suma de los $|A_i|$ menos la suma de las dobles intersecciones $|A_i \cap A_j|, i < j$, más la suma de las triples $|A_i \cap A_j \cap A_k|, i < j < k$, etcétera. Esto puede escribirse de la manera siguiente:
$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}| \right)$$

Ejercicio 48.– En este ejercicio probaremos que la intersección de dos trasladados de diferentes subespacios coordenados de $\mathbb{N}^n$ es el trasladado de un subespacio coordenado de menor dimensión.

1. Consideremos $A = \alpha + [e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}]$, con $\alpha = \sum_{i \notin \{i_1, \ldots i_m\}} a_i e_i$, y por otra parte $B = \beta + [e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}]$, donde $\beta = \sum_{i \notin \{j_1, \ldots, j_m\}} b_i e_i$. Si $A \neq B$ y $A \cap B \neq \emptyset$ probar que
$$[e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}] \neq [e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}]$$
y que $A \cap B$ es un trasladado de
$$[e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}] \cap [e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}]$$

2. Deducir que $dim(A \cap B) < max(m, r)$.

Ejercicio 49.– Calcular los polinomios de Hilbert afines para cada uno de los siguientes ideales:

1. $I = (x^3y, xy^2) \subset k[x, y]$.
2. $I = (x^3y^2 + 3x^2y^2 + y^3 + 1) \subset k[x, y]$.
3. $I = (x^3yz^5, xy^3z^2) \subset k[x, y, z]$.
4. $I = (x^3 - yz^2, y^4 - x^2yz) \subset k[x, y, z]$.

Ejercicio 50.–
a) Sea $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal monomial, con k un cuerpo infinito. Estudiaremos $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

1. Probar que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$.
2. Probar que la intersección de ideales monomiales es un ideal monomial.
3. Probar que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ es un ideal monomial.
4. El paso final es probar que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$, y para ello bastará ver que $x^\alpha \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ implica $x^{r\alpha} \in I$ para un cierto $r > 0$.

b) Sea K_2 un cuerpo con dos elementos y sea $I = (x) \subset K_2[x, y]$. Probar que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = (x, y^2 - y)$, que contiene al radical de I y no es un ideal monomial.

EJERCICIO 51.– Sea k algebraicamente cerrado. Calcular la dimensión de las variedades afines definidas por los siguientes ideales.

1. $I = (xz, xy - 1) \subset k[x, y, z]$.
2. $I = (zw - y^2, xy - z^3) \subset k[x, y, z, w]$.

EJERCICIO 52.– (*1'5 puntos*) Calcular el polinomio de Hilbert afín del ideal I de $k[x, y, z]$ engendrado por los polinomios $f_1 = z^2 + x, f_2 = xz^2$.

EJERCICIO 53.– Ahora estudiaremos cuándo el polinomio de Hilbert es cero.

1. Si $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ es un ideal homogéneo, probar $(x_0, \ldots, x_n)^r \subset I$ para algún r si y sólo si el polinomio de Hilbert de I es el polinomio nulo.
2. Concluir que si $V = \mathcal{V}_p(I) \subset \mathbb{P}_n(k)$ (con k algebraicamente cerrado) es una variedad, entonces es vacía si y sólo si el polinomio de Hilbert de I es nulo. Dar un ejemplo con k infinito donde no se verifique lo anterior.

EJERCICIO 54.– Sea k algebraicamente cerrado. Calcular la dimensión de las siguientes variedades proyectivas.

1. $I = (x^2 - y^2, x^3 - x^2y + y^3) \subset k[x, y, z]$.
2. $I = (y^2 - xz, x^2y - z^2w, x^3 - yzw) \subset k[x, y, z, w]$.

EJERCICIO 55.– La imagen de la aplicación que definimos a continuación recibe el nombre de *inmersión de Segre*. Supondremos que k es un cuerpo **infinito**.
Sea $\psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \longrightarrow \mathbb{P}^N$, con $N = rs + r + s$ la aplicación definida por $\psi((a_0 : \cdots : a_r), (b_0 : \cdots : b_s)) := (a_0b_0 : a_0b_1 : \cdots : a_rb_s)$.

1. Probar que ψ está bien definida y es inyectiva.
2. Probar que la imagen de ψ es una variedad irreducible en $\mathbb{P}^N$ [Ayuda: Sean $\{z_{ij}\}_{0\leq i\leq r\ 0\leq j\leq s}$ las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^N$ y $\phi : k[\{z_{ij}\}] \longrightarrow k[x_0, \ldots, x_r, y_0, \ldots, y_s]$ el homomorfismo de k-álgebras definido por $\phi(z_{ij}) = x_iy_j$. Probar que su núcleo es homogéneo y primo. Concluir que $Im(\psi) = v_p(Ker\phi)$ teniendo en cuenta que los polinomios de la forma $z_{ij}z_{kl} - z_{kj}z_{il}$ están en $Ker\phi$.]

3. Para $r = s = 1$ probar que la inmersión de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^3$ es $v_p(I)$, donde $I = (X_0X_3 - X_1X_2)$.

   Calcular el polinomio de Hilbert de I.

Ejercicio 56.– La imagen de la aplicación que definimos a continuación recibe el nombre de *inmersión d-upla*. Supondremos que k es un cuerpo **infinito**.
Sean $n, d > 0$ dos enteros positivos, y sean $M_0, \ldots, M_N$ todos los monomios de grado d en las $n+1$ variables $X_0, \ldots, X_n$, donde $N = \binom{n+d}{n} - 1$. Definimos la aplicación $\psi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$, por $\psi((a_0 : \cdots : a_n)) = (M_0(\mathbf{a}) : \cdots : M_N(\mathbf{a}))$.

1. Probar que ψ está bien definida y es inyectiva.

2. Probar que la imagen de ψ es una variedad irreducible en $\mathbb{P}^N$ [Ayuda: Sea $\phi : k[Y_0, \ldots, Y_N] \longrightarrow k[X_0, \ldots, X_n]$ el homomorfismo de k-álgebras definido por $\phi(Y_i) = M_i$. Probar que su núcleo es homogéneo y primo. Concluir que $Im(\psi) = v_p(Ker\phi)$]

3. Describir **razonadamente** un algoritmo cuya entrada sean los enteros n y d, y cuya salida sean unas ecuaciones de $Im(\psi)$.

4. Para $n = 1$ y $d = 3$, comprobar que $Im(\psi)$ es una curva monomial proyectiva, es decir, la clausura proyectiva de una curva monomial afín. Dar las paramétricas de esta última.

Ejercicio 57.– Demostrar las siguientes afirmaciones.

1. Sea k un cuerpo, e $I = (x^2, xy) \subset k[x, y]$. Entonces,

   $$I = (x) \cap (x^2, y - ax),$$

   es una descomposición primaria minimal de I, para todo $a \in k$.

2. Sea A un anillo, I un ideal descomponible con 5 primos asociados P_i, $1 \leq i \leq 5$, verificando las siguientes relaciones de inclusión:

   $$P_1 \subset P_2 \subset P_3 \qquad P_4 \subset P_5.$$

   Supongamos que $I = \bigcap_{i=1}^{5} Q_i$ es una descomposición primaria minimal de I con $\sqrt{Q_i} = P_i$. Probar que $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_4$ no depende de la descomposición.

3. Sea $V = \mathcal{V}(I) \subset \mathbf{A}^n(k)$, donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces las componentes irreducibles de V son las variedades afines definidas por los primos asociados a I que son aislados.

EJERCICIO 58.– (Teorema de estructura para anillos artinianos)
Un anillo artiniano A es (salvo isomorfismo), producto directo finito de anillos locales artinianos (Teorema 8.7 del Atiyah-McDonald)

EJERCICIO 59.– En $\mathbb{Z}[X]$, probar que $\mathfrak{m} = (2, X)$ es un ideal maximal y que $\mathfrak{q} = (4, X)$ es $\mathfrak{m}$-primario pero no es una potencia de $\mathfrak{m}$.

EJERCICIO 60.– Supongamos que A es un dominio de integridad verificando la siguiente propiedad:
Para todo elemento $x \neq 0$ de K su cuerpo de fracciones, $x \in A$ ó $x^{-1} \in A$. Probar que A es íntegramente cerrado.