Programa de Álgebra III (Curso 2001-02)

Opción Álgebra Conmutativa

Tema 1.- Anillos e ideales.
Tema 2.- La Categoría de Módulos.
Tema 3.- Anillos y Módulos de fracciones: Localización.
Tema 4.- Anillos y Módulos Notherianos.
Tema 5.- El Teorema de la base de Hilbert. Variedades afines. El Teorema de los Ceros de Hilbert.
Tema 6.- Bases de Gröbner. El Teorema de División y el Algoritmo de Buchberger.
Tema 7.- Teoría de Eliminación. Aplicaciones.
Tema 8.- Variedades proyectivas. Clausura proyectiva de una variedad afín.
Tema 9.- Dimensión de Krull.
Tema 10.- Dependencia entera: teoremas del ascenso y del descenso.
Tema 11.- Lema de normalización de Noether.
Tema 12.- Polinomio de Hilbert: cálculo efectivo de la dimensión.
Tema 13.- Funciones regulares y racionales. Morfismos de variedades.
Tema 14.- Teorema de los ideales principales de Krull.
Tema 15.- Descomposición primaria de ideales. Primos asociados a módulos sobre anillos noetherianos.

Bibliografía

1. ADAMS, W.W., LOUSTAUNAU,P.: *An Introduction to Gröbner Bases*, Americam Mathematical Society, Graduate Studies in Math. Vol. III, 1994.

2. ATIYAH, M.F.; MACDONALD, I.G.: *Introducción al álgebra conmutativa.* Ed. Reverté, Barcelona, 1989.

3. BECKER, T.; KREDEL, H.; WEISPFENNING, V: *Gröbner bases: A Computational Approach to Commutative Algebra*, GTM 141, Springer, New York, 1993.

4. COX, D., LITTLE,J., O'SHEA, D.: *Ideals, Varietes and Algorithms*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer, New York, 1991.

5. COX, D., LITTLE,J., O'SHEA, D.: *Using Algebraic Geometry* , GTM 185, Springer, New York, 1998.

6. EISENBUD, D.: *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, GTM 150, Springer, New York, 1995.

7. HARTSHORNE, R.: *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics 52, New York, 1977.

8. KUNZ, E.: *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston 1991.

9. MATSUMURA, H.: *Commutative Algebra (Second edition)*, Benjamin/Cummings Publ. Co., New York,1980.

10. MATSUMURA, H.: *Commutative Ring Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge studies in advanced mathematics, 8, Cambidge, 1986.

11. STURMFELS, B.: *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, AMS University Lectures Series, Vol.8, 1995.

12. VASCONCELOS, W.V.: *Arithmetic of Blowup Algebras.* London Math. Soc. Lecture Notes Series 195. Cambridge University Press, 1995.

13. VASCONCELOS, W.V.: *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Algebra and Computation in Math. Volum 2, Springer, Berlin, 1998.

14. ZARISKY, O.; SAMUEL, P.: *Commutative Algebra, I, II*, Springer Verlag, Graduate Texts in Math., 28-29, New York, 1960.

Objetivos y Metodología

El Programa anterior presenta una Introducción al Álgebra Conmutativa. La estructura algebraica que se estudiará con profundidad será la de los **módulos**.

El origen de la teoría de módulos se encuentra en los trabajos de Dedekind quien, hacia el segundo tercio del siglo pasado y, a partir de las ideas de Kummer en su teorema relativo al último teorema de Fermat, crea en todos sus detalles la teoría de ideales en los anillos de enteros algebraicos, para probar el teorema de existencia y unicidad de la descomposición de ideales en factores primos. Para probar este teorema, empieza Dedekind a elaborar una teoría elemental de módulos que, si bien se reduce aquí a los submódulos de un cuerpo de números, la concepción que tiene de ellos y los resultados que demuestra están ya expuestos en una forma inmediatamente aplicable a los módulos más generales.

Desde entonces, una de las características más destacadas del desarrollo del Álgebra Conmutativa, sobre todo a partir de la obra de Noether y Krull, es la tendencia a la **linealización**, es decir, los ideales son considerados como módulos y por tanto les son aplicables las construcciones del Álgebra Lineal (cocientes, producto, producto tensorial, formación de módulos de homomorfismos...) dando lugar, en general, a módulos que ya no son ideales. De este modo se ha ido poniendo de manifiesto que en muchas cuestiones carece de interés limitarse al estudio de los ideales de un anillo, y es por el contrario conveniente enunciar más generalmente los teorema para módulos (sometidos eventualmente a ciertas condiciones de finitud).

El programa incluye temas y conceptos propios de la Geometría Algebraica. Con la inclusión de los temas de naturaleza geométrica se persigue un doble objetivo:

Por una parte proporcionar al alumno una motivación de algunos conceptos y resultados del Álgebra Conmutativa como por ejemplo, la localización de módulos, la descomposición primaria de ideales... Usaremos la Geometría para motivar estos conceptos y ayudar así a que sean asimilados.

En segundo lugar, se pretende que se conozcan importantes aplicaciones del Álgebra Conmutativa.

Por ser el Álgebra Conmutativa Computacional una fuente de investigación actual, revisaremos los conceptos, técnicas y resultados que estudiemos desde un punto de vista constructivo.

Fechas de exámenes

Se realizará un examen de toda la asignatura en diciembre (14-12-01), otro en junio (14-6-02) y otro en septiembre (20-9-02).

Profesores

Coordinadora de la asignatura Pilar Pisón Casares.