ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **10-3-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Pruebe que un subgrupo $H \subset G$ es normal si y sólo si para cada $x \in G$ y para cada $h \in H$ se verifica que $[x, h] = xhx^{-1}h^{-1} \in H$.

Ejercicio 2.– Sea $n \geq 3$.

1. Compruebe que $(i\ j)(j\ k) = (i\ j\ k)$, $(i\ j)(k\ l) = (i\ j\ k)(j\ k\ l)$, $(i\ j\ k) = (1\ i\ j)(1\ j\ k)$, $(1\ i\ j) = (1\ 2\ j)(1\ 2\ i)^2$, siendo todos los índices distintos.
2. Pruebe que A_n está generado por los 3-ciclos.
3. Pruebe que $A_n = \langle (1\ 2\ i), i = 3, \ldots, n \rangle$.

Ejercicio 3.–

1. Si $n \geq 4$, $3 < j \leq n$, calcule $(3\ 2\ j)(1\ 2\ 3)^2(3\ 2\ j)^{-1}$.
2. Sea $N \lhd A_n$ para $n \geq 3$. Con el ejercicio anterior, pruebe que si N contiene un 3-ciclo entonces $N = A_n$.

Ejercicio 4.– Pruebe que A_4 no tiene subgrupos de orden 6, usando ejercicios anteriores.

Ejercicio 5.–

1. Sean $\sigma = (1\ 2\ \ldots r)\sigma'$, $r \geq 4$, σ' producto de ciclos disjuntos con elementos en $\{1, 2, \ldots, r\}$, y $\tau = (1\ 2\ 3)$. Calcule $[\tau, \sigma]$ (vea la definición en el ejercicio 1).
2. Sean $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)\sigma'$, σ' producto de ciclos disjuntos con elementos en $\{1, 2, \ldots, 6\}$, y $\tau = (2\ 3\ 4)$. Calcule $[\tau, \sigma]$.
3. Sean $\sigma = (1\ 2\ 3)\sigma'$, σ' producto de trasposiciones disjuntas con elementos en $\{1, 2, 3\}$. Calcule σ^2.
4. Sean $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)\sigma'$, σ' producto de trasposiciones disjuntas con elementos en $\{1, 2, 3, 4\}$, y $\tau = (2\ 3\ 4)$, $\rho = (1\ 4\ 5)$. Calcule $[\rho, [\tau, \sigma]]$.
5. Si $n \geq 5$, demuestre que A_n es simple, es decir no tiene subgrupos normales propios (use el ejercicio 3)

Ejercicio 6.– Sea $n \geq 3$

1. Calcule $(1\ i)(1\ j)(1\ i)$; $(i-1\ i)(1\ i-1)(i-1\ i)$; $(1\ 2\ \ldots n)(i-1\ i)(1\ 2\ \ldots n)^{-1}$, siendo $2 \leq i, j \leq n$ distintos.
2. Demuestre que $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle = \langle (1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1, n) \rangle = \langle (1\ 2\ \ldots n), (1\ 2) \rangle$.

Ejercicio 7.–

1. Sea $S \subset G$ un subconjunto tal que $xSx^{-1} \subset \langle S \rangle$ para todo $x \in G$. Pruebe que $\langle S \rangle \lhd G$.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \langle \{x^n : x \in G\} \rangle$. Pruebe que $H_n \lhd G$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, pruebe que $\{x^n : x \in D_8\}$ es un subgrupo normal de D_8. ¿Ocurre lo mismo con D_6?

Ejercicio 8.– Aplique la demostración dada del teorema de Cayley para encontrar un subgrupo de S_n isomorfo al grupo cíclico C_n, para cada $n \geq 3$.

Ejercicio 9.– Aplique la demostración dada del teorema de Cayley para encontrar un subgrupo de S_6 isomorfo al grupo S_3.

Ejercicio 10.– Sea G un grupo de orden 6. Demuestre que G es isomorfo al cíclico C_6 o a S_3 según sea G abeliano o no.

Ejercicio 11.– Sea $n > 2$ y $\varphi : S_n \to S_{n+2}$ la aplicación dada por

$$\begin{cases} \varphi(\sigma)(i) = \sigma(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ \varphi(\sigma)(n+1) = n+1, \varphi(\sigma)(n+2) = n+2 & \text{si } \sigma \in A_n \\ \varphi(\sigma)(n+1) = n+2, \varphi(\sigma)(n+2) = n+1 & \text{si } \sigma \notin A_n \end{cases}$$

1. Pruebe que φ es un monomorfismo de grupos.
2. Pruebe que $\mathrm{im}(\varphi) \subset A_{n+2}$.
3. Pruebe que todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo del grupo alternado.

Ejercicio 12.– Sea $G = \langle A, B \rangle \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3)$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Deduzca razonadamente si G es isomorfo a D_8 o a Q_8.