ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **12-5-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Sea $K|k$ una extensión y $\alpha \in K$. Pruebe que α es algebraico sobre k si y solamente si la extensión $k(\alpha)|k$ es finita.

Ejercicio 2.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo, y $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$.

1. Calcule las raíces de $X^p - X$ sobre k.
2. Sea $a \in k$ y α una raíz del polinomio $f(X) = X^p - X - a$. Pruebe que el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre k es $k[\alpha]$.

Ejercicio 3.– Dé una base del cuerpo $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Escriba la expresión en la misma del elemento $1/\sqrt[3]{2}$ y calcule los automorfismos del cuerpo K que dejan fijo a $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo, y $\zeta = \exp(2\pi i/p)$ raíz p-ésima de la unidad. Pruebe que un cuerpo de descomposición del polinomio $X^p - 1$ sobre $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}[\zeta]$, y que $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = p - 1$.

Ejercicio 5.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo, y $\zeta = \exp(2\pi i/p)$ raíz p-ésima de la unidad. Pruebe que un cuerpo de descomposición del polinomio $X^p - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ es $K = \mathbb{Q}[\sqrt[p]{2}, \zeta]$, y que $[K : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

Ejercicio 6.– Sea $\rho = \exp(2\pi i/3) = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ raíz cúbica de la unidad, y consideremos el cuerpo $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho]$. Sea σ el automorfismo de K definido por

$$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \rho\sqrt[3]{2}, \sigma(\rho) = \rho.$$

Pruebe que el conjunto de elementos de K que quedan fijos por la acción de σ es $\mathbb{Q}[\rho]$.

Ejercicio 7.– Consideremos la siguiente extensión de cuerpos: $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]$.

1. Calcule el grado de la extensión $[K : \mathbb{Q}]$.
2. Pruebe que $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ es elemento *primitivo*, esto es, que $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

Ejercicio 8.– Sea $a \in \mathbb{Q}$ un número racional que no sea el cubo de ningún número racional.

1. ¿Cuál es el grado de un cuerpo de descomposición del polinomio $X^3 - a$ sobre $\mathbb{Q}$?
2. Si z_1, z_2, z_3 son las raíces de $X^3 - a$ en $\mathbb{C}$, ¿son iguales $\mathbb{Q}[z_1], \mathbb{Q}[z_2], \mathbb{Q}[z_3]$?

Ejercicio 9.– Sea $\omega = \exp(2\pi i/7)$ y $\alpha = \omega + \omega^{-1}$.

1. Pruebe que ω es raíz del polinomio cuadrático $z^2 - \alpha z + 1$ sobre $\mathbb{Q}[\alpha]$.
2. A partir del polinomio mínimo de ω sobre $\mathbb{Q}$, calcule el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 10.– Calcule un elemento primitivo de un cuerpo de descomposición del polinomio $x^5 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 11.– Consideremos las extensiones de cuerpos

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[\beta] = \mathbb{L}$$

donde

$$\beta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1) \in \mathbb{K}.$$

1. Pruebe que las siguientes ecuaciones definen dos automorfismos ϕ_1, ϕ_2 de $\mathbb{L}$:

$$\phi_1(r) = r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}, \phi_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \phi_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \phi_1(\beta) = \tfrac{1}{1+\sqrt{2}}\beta$$
$$\phi_2(r) = r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}, \phi_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \phi_1(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \phi_2(\beta) = \beta\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}.$$

2. Calcule el subcuerpo K de $\mathbb{L}$ que permanece invariante por la acción de ϕ_1, y determine $[K : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 12.– Sea $f(X) = X^4 - 2$, $\alpha = \sqrt[4]{2}$.

1. Pruebe que $\mathbb{L} = \mathbb{Q}[\alpha, i]$ es un cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$.
2. Calcule $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$.
3. Consideremos el automorfismo de $\mathbb{L}$ definido por

$$\sigma(r) = r \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}, \sigma(\alpha) = \alpha i, \sigma(i) = i.$$

   Calcule el subcuerpo K de $\mathbb{L}$ que permanece invariante por la acción de σ, y determine $[K : \mathbb{Q}]$.