ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **14-4-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Sea A un anillo y $M \subset A$ un ideal.

1. Pruebe que M es maximal si y sólo si A/M es un cuerpo.
2. Pruebe que si M es maximal, entonces es primo. ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 2.– Sea A un dominio de integridad, y consideremos elementos $a, b, u, \in A$. Pruebe que:

1. $A = \langle u \rangle$ si y sólo si u es una unidad de A.
2. $\langle a \rangle \subset \langle b \rangle$ si y sólo si $b \mid a$.
3. $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ si y sólo si a y b son asociados.

Ejercicio 3.– Pruebe que un dominio de integridad finito es un cuerpo.

Ejercicio 4.– Sea $A = \{\frac{a}{2^n} \mid a, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Pruebe que A es un dominio de integridad.
2. Halle sus unidades.
3. Halle el cuerpo de fracciones de A.

Ejercicio 5.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y $E_p = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$.

1. Pruebe que E_p es un dominio de integridad.
2. Demuestre que $I = \langle p \rangle$ es un ideal maximal de E_p.
3. Halle el cuerpo de fracciones de E_p.

Ejercicio 6.– Calcule las unidades de $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Ejercicio 7.–

1. Demuestre que $1 + \sqrt{2}$ es una unidad de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Deduzca que hay infinitas unidades en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
2. Demuestre que las ecuaciones de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$ y $x^2 - 2y^2 = -1$ tienen infinitas soluciones enteras.

Ejercicio 8.– Dados dos anillos A y B, pruebe que todos los ideales de $A \times B$ son de la forma $I \times J$ con $I \subset A$, $J \subset B$ ideales. Encuentre todos los ideales de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$.

Ejercicio 9.– Sea A un anillo. Pruebe que $A[X]$ es un anillo con las operaciones suma y producto de polinomios usuales. Si A es dominio encuentre las unidades de $A[X]$. Pruebe que en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}8[X]$, el elemento $1 + 2X$ es unidad.

Ejercicio 10.–

1. Pruebe la existencia del algoritmo de división entera para dos polinomios f, g de $A[X]$, cuando el coeficiente líder de g es una unidad de A.
2. Encuentre un ejemplo en el que no se da la unicidad del algoritmo de división entera en $A[X]$, si el coeficiente líder del divisor no es una unidad.
3. Idem con la existencia.

Ejercicio 11.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Demuestre que $\langle p, X\rangle$ es un ideal no principal de $\mathbb{Z}[X]$.

Ejercicio 12.– Dado un anillo A, se define $A[X,Y]$ como el conjunto de polinomios en dos variables:

$$A[X,Y] := \left\{ \sum_{(i,j)=(0,0)}^{(n,m)} a_{ij} X^i Y^j, a_{ij} \in A \right\}$$

1. Pruebe que con la operación suma natural y el producto

$$\left(\sum a_{ij} X^i Y^j\right)\left(\sum b_{ij} X^i Y^j\right) = \left(\sum c_{km} X^k Y^m\right)$$

con $c_{km} = \sum a_{ij} b_{pq}$ siempre que $i+p=k$ y $j+q=m$, $A[X,Y]$ es un anillo isomorfo a $A[X][Y]$.

2. Pruebe que si A es un dominio de integridad entonces también lo es $A[X,Y]$.
3. Encuentre las unidades de $A[X,Y]$.

Ejercicio 13.–

1. Sea $\Delta = \{(a,a) \in \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Deduzca si Δ es un ideal o un subanillo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. Estudie si los ideales de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ son todos principales.
3. Estudie si $\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}2$ es un ideal primo o maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.