ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **17-3-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– En S_{11}, ¿cual es el mayor orden que puede tener un elemento?

Ejercicio 2.– Pruebe que $S_3 \simeq \langle a, b : a^2 = 1, b^3 = 1, a^{-1}bab^{-2} = 1\rangle$.

Ejercicio 3.– Sea $G = \langle x, y : xyx = yxy\rangle$ y F el grupo libre generado por x, y.

1. Sea $\varphi : F \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo de grupos definido por $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$. Pruebe que φ induce un homomorfismo de G en $\mathbb{Z}$ sobreyectivo. Deduzca que G es infinito.
2. Sea $\theta : F \to S_3$ el homomorfismo de grupos definido por $\theta(x) = (12), \theta(y) = (13)$. Pruebe que θ induce un homomorfismo de grupos de G en S_3 sobreyectivo. Deduzca que G no es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 4.– En una máquina tenemos un panel con n celdas, donde se muestra una permutación de S_n. Esta máquina cuenta con $n-1$ botones. El primer botón permite el intercambio del contenido de las celdas 1 y 2. El segundo botón realiza el intercambio del contenido de las celdas 2 y 3, y así hasta el botón $n-1$, que realiza el intercambio de las celdas $n-1$ y n. Queremos reordenar la permutación de partida de tal forma que la celda con el número 1 se coloque en la primera posición, la celda con el número 2 en la segunda posición, y así con todas, con el uso de los botones que tiene el dispositivo. ¿Es posible conseguirlo?

Ejercicio 5.– Sea $s > 2$ un número impar. Consideremos el conjunto

$$G = \{-1, 1\} \times \{0, 1, \ldots, s-1\},$$

con la operación

$$(e, x) * (f, y) = (ef, ey + x),$$

donde los productos y sumas internas se toman en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}s$.

1. Pruebe que $(G, *)$ es un grupo.
2. Calcule un isomorfismo de G en D_r, el grupo diédrico de orden $r = 2s$.
3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}s$, con $a \neq 0$. Definimos la aplicación $\tau : D_r \to D_r$ como

   $$\tau(e, x) = (e, e(a - x) + b).$$

   Pruebe que τ es una aplicación biyectiva y que si $u, v \in D_r$, con $u \neq v$ entonces $\tau(u) * v \neq \tau(v) * u$.

Ejercicio 6.– Sea G el subgrupo multiplicativo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ generado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pruebe que A y B satisfacen las relaciones $A^4 = I, A^2 = B^2, B^{-1}AB = A^{-1}$.
2. Pruebe que $G \simeq Q_8$.
3. Pruebe que todo subgrupo de Q_8 es normal.

Ejercicio 7.– Sea G_n el subgrupo multiplicativo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\zeta = \exp(2\pi i/n)$. Verifique que G_n es isomorfo a D_{2n}.

Ejercicio 8.–

1. Pruebe que el grupo definido por la presentación $\langle x, y, z : x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1}, z = xyx^{-1} \rangle$ es isomorfo al grupo $\langle x, y : xyx = yxy \rangle$.
2. Pruebe que el grupo definido por la presentación $\langle x, y, z, w : x = z^{-1}wz, y = wxw^{-1}, z = x^{-1}yx \rangle$ es isomorfo al grupo $\langle x, y : yx^{-1}yxy^{-1} = x^{-1}yxy^{-1}x \rangle$.

Ejercicio 9.– Considere el grupo definido por la presentación

$$QD_{16} = \langle \sigma, \tau | \ \sigma^8 = \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^3 \rangle.$$

1. Pruebe que QD_{16} tiene 16 elementos.
2. Pruebe que tiene tres subgrupos de orden 8, que son
$$H_1 = \langle \tau, \sigma^2 \rangle, H_2 = \langle \sigma \rangle, H_3 = \langle \sigma^2, \sigma\tau \rangle.$$
3. Pruebe que $H_1 \simeq D_8, H_2 \simeq C_8, H_3 \simeq Q_8$.
4. Pruebe que QD_{16} es resoluble.

Ejercicio 10.– Sean G_1 y G_2 grupos resolubles. ¿Es $G_1 \times G_2$ un grupo resoluble?

Ejercicio 11.– Sea H el subgrupo de S_4 generado por $\sigma = (1234), \tau = (12)(34)$. Sea K el subgrupo de H generado por σ.

1. Pruebe que K es un subgrupo normal de H. ¿Cuántos elementos tienen K y H/K?
2. Calcule una presentación del grupo H correspondiente a los generadores σ y τ.

Ejercicio 12.– Pruebe que
$$\langle a, b : a^4 = 1, b^6 = 1, ab = ba, a^2 = b^3 \rangle$$
es un grupo cíclico de 12 elementos.