ÁLGEBRA | **Problemas propuestos** | **18-2-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Sea G un grupo, $g \in G$ y definimos una nueva multiplicación $\cdot$ sobre G por la fórmula $a \cdot b = agb$ para todo $a, b \in G$. Pruebe que G con la operación $\cdot$ es un grupo.

Ejercicio 2.– Pruebe que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ es un grupo con la operación definida por

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b).$$

¿Es abeliano?

Ejercicio 3.– Sea $V \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ el conjunto

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pruebe que V es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.– Sean b_0, m_0 y n_0 enteros positivos y consideremos el conjunto $S \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : m_0 | m, n_0 | n, b_0 | b \right\}.$$

¿Cuándo es S un subgrupo?

Ejercicio 5.– Sea G un grupo que tiene ocho elementos, que notaremos por los números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Supongamos que el producto de $v, w \in G$ lo escribimos como $v * w$ y que se verifica

- $v * w \leq v + w$ para todo $v, w \in G$.
- $v * v = 0$ para todo $v \in G$.

Reconstruya la tabla de multiplicación de G.

Ejercicio 6.– Sea c una constante real positiva y v un número con $-c < v < c$. Consideremos la matriz

$$A(v) = \lambda(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\lambda(v) = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1}$.

1. Pruebe que

$$A(v_1)A(v_2) = A(v_3)$$

   donde

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

2. Use lo anterior para demostrar que la multiplicación de matrices induce una estructura de grupo en el conjunto
$$G = \{A(v) | -c < v < c\}.$$

Este grupo se denomina *grupo de Lorentz*.

Ejercicio 7.– Sea G es un grupo de orden $2n$. Pruebe que el número de elementos de G de orden 2 es impar.

Ejercicio 8.– En $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pruebe que A tiene orden 3, B tiene orden 4 y que AB tiene orden infinito.

Ejercicio 9.– Pruebe que si G es un grupo no abeliano, entonces tiene al menos orden seis.

Ejercicio 10.– Sean n, m números enteros. Pruebe que

1. $\langle n \rangle = \mathbb{Z}n$.
2. $\mathbb{Z}n + \mathbb{Z}m = \langle n, m \rangle = \mathbb{Z}d$, donde $d = \mathrm{mcd}(m, n)$.
3. $\mathbb{Z}n \cap \mathbb{Z}m = \mathbb{Z}k$, donde $k = \mathrm{mcm}(m, n)$.

Ejercicio 11.– Sea G un grupo, y $a \in G$.

1. Si a tiene orden finito, entonces a^{-1} también y $o(a^{-1}) = a$.
2. Si a tiene orden infinito entonces a^{-1} tiene orden infinito.
3. Si $o(a) = n$ y $a^m = 1$ entonces n divide a m.

Ejercicio 12.– Sean C_n y C_m grupos cíclicos de órdenes n y m, respectivamente. Pruebe que $C_n \times C_m$ es un grupo cíclico si y sólo si $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$.