ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **19-5-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Deduzca si el polígono regular de 9 lados es constructible con regla y compás. Idem con el polígono regular de 11 lados.

Ejercicio 2.– Demostrar que es posible construir con regla y compás el ángulo de 3^o. Para ello utilizar el de $12^o = 72^o - 60^o$.

Ejercicio 3.– Se dice que un polinomio $f(X_1, ..., X_n) \in k[X_1, ..., X_n]$ es simétrico si, para toda $\sigma \in S_n$, se tiene que

$$f\left(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}\right) = f\left(X_1, ..., X_n\right).$$

Ejemplos de polinomios simétricos son

$$S_1 = X_1 + X_2 + ... + X_n,\ S_2 = \sum_{i<j} X_i X_j,\ ...,\ S_r = \sum_{i_1<i_2<...<i_r} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_r},\ ...,\ S_n = X_1 X_2 ... X_n.$$

Pruebe que todo polinomio simétrico se puede escribir como un polinomio en $S_1, ..., S_n$, que se denominan polinomios simétricos elementales. Exprese $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ como polinomio en $S_1, ..., S_n$.

Ejercicio 4.– Sea $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \in k[X]$, con raíces (no necesariamente en k) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Se define el discriminante de f como el número

$$\mathrm{Disc}(f) = \prod_{i<j} \left(\alpha_i - \alpha_j\right)^2.$$

Pruebe que $\mathrm{Disc}(f) \in k$, independientemente de que las raíces estén o no en k. Halle el discriminante de las ecuaciones de segundo y tercer grado en función de los coeficientes de las ecuaciones.

Ejercicio 5.– Sea $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible de grado 3, Δ su discriminante y fijemos $\delta = \sqrt{\Delta}$ una raíz cuadrada. Sea $\mathbb{L}$ un cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$. Pruebe que

- Si $\delta \in \mathbb{Q}$ entonces $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q}) = A_3$.
- Si $\delta \notin \mathbb{Q}$ entonces $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q}) = S_3$.

Ejercicio 6.– Usar el ejercicio anterior para hallar el grupo de Galois de las siguientes ecuaciones:

- $X^3 - 2 = 0$.
- $X^3 + X^2 + X + 1 = 0$.
- $X^3 - 3X + 4 = 0$.

Ejercicio 7.– Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. Pruebe que $\mathbb{K}$ es normal sobre $\mathbb{Q}$. Calcule $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, sus subgrupos y sus cuerpos fijos correspondientes.

Ejercicio 8.– Sea $f(X) = X^4 + 1$, $\alpha = \sqrt{2}$.

1. Pruebe que $\mathbb{L} = \mathbb{Q}[\alpha, i]$ es un cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$.
2. Calcule $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$.
3. Pruebe que $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ es isomorfo a $C_2 \times C_2$, donde C_2 es el grupo cíclico de 2 elementos.
4. A partir de los subgrupos de $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ determine los cuerpos intermedios $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$.

Ejercicio 9.– Sea $f(X) = X^4 - 2$, $\alpha = \sqrt[4]{2}$. Utilizando un ejercicio de la práctica anterior:

1. Calcule $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$.
2. Demuestre que $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ es isomorfo a D_8, el grupo diédrico de 8 elementos, con presentación $\langle x, y | x^4 = 1, y^2 = 1, xy = yx^3 \rangle$.
3. Calcule todos los subgrupos de D_8 (hay 10 en total).
4. Calcule los cuerpos intermedios $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ que sean extensiones normales.

Ejercicio 10.– Sea $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + a \in \mathbb{Q}[X]$. Calcule el grupo de Galois de $f(X)$ para los casos $a = 1, 0, -1, -4$.

Ejercicio 11.– Sea $f(X) = X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$. Calcule $\mathbb{K}$ un cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$ y los cuerpos intermedios $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{K}$. ¿Cuáles son cuerpos de descomposición?

Ejercicio 12.– Sean $f(X) = X^6 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz de $X^2 + X + 1 = 0$, $K \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$ y $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$.

1. Demuestre que $K = \mathbb{Q}(\omega, i)$. Para ello demuestre primero que $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = i\omega$, $x_4 = -i\omega$, $x_5 = i\omega^2$, $x_6 = -i\omega^2$ son todas las raíces de f.
2. Calcule $[K : \mathbb{Q}]$.
3. Con la notación del apartado 1), exprese G como subgrupo de S_6.
4. Halle todos los subgrupos de G.
5. Razone cuáles de los siguientes cuerpos son intermedios entre $\mathbb{Q}$ y K, y justifique si hay alguno más:

$$(a)\quad \mathbb{Q}(i) \quad (b)\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \quad (c)\quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \quad (d)\quad \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \quad (e)\quad \mathbb{Q}(\omega) \quad (f)\quad \mathbb{Q}(i\omega)$$