ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **21-4-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Resuelva los siguientes problemas propuestos por Antonio María del Fiore a Tartaglia:

1. Determine por dónde debe ser cortado un árbol de 12 varas de altura de tal manera que la parte que quede en tierra sea la raíz cúbica de la parte superior cortada.
2. Encuentre un número que se convierte en 6 cuando se le suma su raíz cúbica.
3. Un hombre vende un zafiro por 500 ducados, obteniendo así un beneficio de la raíz cúbica del precio que pagó por él. ¿A cuánto asciende el beneficio?

Ejercicio 2.– Sea $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, y $p/q \in \mathbb{Q}$ una raíz de f escrita en forma irreducible. Entonces $p|a_0$ y $q|a_n$.

Ejercicio 3.– Pruebe el criterio de Eisenstein: Sea $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ tal que existe un primo p verificando:

$$a_n \notin \mathbb{Z}p, \ \ a_i \in \mathbb{Z}p, \ i = 0, ..., n-1, \ \ a_0 \notin \mathbb{Z}p^2.$$

Entonces $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 4.– Sea $f(x) \in k[x]$ un polinomio de grado mayor que 0. Pruebe que son equivalentes:

1. $f(x)$ es irreducible en $k[x]$.
2. Existe $a \in k$ tal que $f(x-a)$ es irreducible en $k[x]$.
3. Para todo $a \in k$ $f(x-a)$ es irreducible en $k[x]$.

Ejercicio 5.– Resuelva la ecuación $x^3 = 15x + 4$ aplicando las fórmulas de Cardano-Tartaglia. Verifique que $4, -2+\sqrt{3}$ y $-2-\sqrt{3}$ son las soluciones de la ecuación. Establezca la correspondencia con el resultado obtenido mediante las fórmulas.

Ejercicio 6.– Sea $R = \mathbb{Z}[2i] = \{a + b2i | a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $p(x) = x^2 + 1 \in R[x]$.

1. Pruebe que el cuerpo de fracciones de R es $K = \mathbb{Q}[i]$.
2. Pruebe que el polinomio $p(x)$ es reducible en $K[x]$ pero irreducible en $R[x]$.

Ejercicio 7.– Determine el carácter reducible o irreducible de los siguientes polinomios:

- $x^3 - 3x - 1$ en $\mathbb{Z}[x]$.
- $x^2 - p$ y $x^3 - p$ en $\mathbb{Q}[x]$, con $p \in \mathbb{Z}$ primo.
- $x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2[x]$.
- $x^3 + x + 1$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2[x]$.

Ejercicio 8.– Sea I un ideal primo de un dominio de integridad A, y sea $p(x)$ un polinomio mónico no constante de $A[x]$. Si la imagen de $p(x)$ en $(A/I)[x]$ es irreducible en $(A/I)[x]$ entonces $p(x)$ es irreducible en $A[x]$.

Pruebe que el polinomio $f(x) = x \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}6[x]$ factoriza como $(3x+4)(4x+3)$, por lo que no es irreducible. Pruebe que la reducción de $f(x)$ módulo los ideales propios $\langle 2 \rangle$ y $\langle 3 \rangle$ de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}6$ es un polinomio irreducible.

Ejercicio 9.– Pruebe que

- el polinomio $x^4 + 10x + 5$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$,
- si $a \in \mathbb{Z}$ es divisible por un primo p pero no por p^2, entonces $x^n - a$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

Verifique que no se puede aplicar el criterio de Eisenstein a $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Pruebe mediante Eisenstein que $g(x) = f(x+1)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$. Deduzca que $f(x)$ es irreducible.

Ejercicio 10.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y consideremos el polinomio

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1.$$

Aplique el criterio de Eisenstein a $\Phi_p(x+1)$ para probar que $\Phi_p(x)$ es irreducible.

Ejercicio 11.– Calcule los polinomios mónicos irreducibles de grado menor o igual que 3 en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2[x]$ y $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3[x]$.

Ejercicio 12.– Pruebe que si $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ entonces n es primo.

Ejercicio 13.– Pruebe que $x^3 + nx + 2$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ para todos los enteros $n \neq 1, -3, -5$.