ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **24-3-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Sea G un grupo y $G' = [G, G]$ su subgrupo derivado. Llamamos abelianizado de G al cociente $G^{ab} = G/G'$. Pruebe que, para cada grupo abeliano H y para cada homomorfismo $f : G \to H$, existe un único homomorfismo $g : G^{ab} \to H$ tal que $f = g \circ \pi$, donde π es el homomorfismo natural de G sobre G^{ab}.

Ejercicio 2.– Sea $n \geq 3$.

1. Calcule $[(i\ j), (i\ k)]$.
2. Deduzca del ejercicio 2 de la práctica 4 que $S'_n \supset A_n$.
3. Compruebe que $[\sigma, \tau] \in A_n$ para todo $\sigma, \tau \in S_n$. Concluir que $S'_n = A_n$.

Ejercicio 3.– Calcule los subgrupos derivados D'_8 y Q'_8.

Ejercicio 4.– Sea G un grupo, $H \lhd G$, tales que H es resoluble y G/H resoluble. Demuestre que G es resoluble.

Ejercicio 5.– Se define el conjunto de los cuaterniones de Hamilton como

$$Q = \{a + bi + cj + dk \mid, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

con la suma y el producto definidos del modo natural, con los convenios siguientes: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Pruebe que Q es un anillo no conmutativo, en el que todo elemento no nulo tiene inverso.

Ejercicio 6.– Se define el radical de un ideal I como $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$. Pruebe que

1. $\sqrt{I}$ es un ideal.
2. $\sqrt{I} \supset I$.
3. $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Ejercicio 7.– Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, $d = \mathrm{mcd}(m, n)$, Pruebe que:

1. $(\mathbb{Z}n)(\mathbb{Z}m) = \mathbb{Z}nm$.
2. $\mathbb{Z}n : \mathbb{Z}m = \mathbb{Z}(n/d)$.
3. Si $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, con p_i primos distintos, entonces $\sqrt{\mathbb{Z}n} = \mathbb{Z}(p_1 \cdots p_r)$.

Ejercicio 8.– Pruebe que son equivalentes:

1. $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ es un cuerpo.
2. $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ es un dominio de integridad.
3. p es primo.

Ejercicio 9.– Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Pruebe que $A/\ker f$ es isomorfo a $f(A)$ (*Primer teorema de isomorfía*).

Ejercicio 10.– Sea A un anillo, $I \subset A$ un ideal, $B \subset A$ un subanillo. Pruebe que:

1. $B + I := \{b + a \mid b \in B, a \in I\}$ es un subanillo de A.
2. I es un ideal de $B + I$ y $B \cap I$ es un ideal de B.
3. $(B + I)/I \simeq B/(B \cap I)$ (*segundo teorema de isomorfía).*

Ejercicio 11.– Sea A un anillo, I, J ideales de A, con $I \subset J$. Pruebe que:

1. J/I es un ideal de A/I.
2. $A/J \simeq (A/I)/(J/I)$ (*tercer teorema de isomorfía*).

Ejercicio 12.– Un ideal I de un anillo A se dice primo si, $I \neq A$ y

$$\forall a, b \in A, ab \in I \implies a \in I \quad \text{ó} \quad b \in I$$

1. Si $I \neq A$, pruebe que I es primo si y sólo si A/I es un dominio de integridad.
2. Halle todos los ideales de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}24$, comprobando los que son primos.