ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **25-2-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Pruebe que todo subgrupo H de un grupo cíclico G es también cíclico. ¿Qué se puede decir de G/H?

Ejercicio 2.– Sea $H \lhd G$ y supongamos que G/H es abeliano. Pruebe que todo subgrupo $K \subset G$ que contiene a H es normal.

Ejercicio 3.– Calcule el orden del elemento $18+\mathbb{Z}24$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}24$. Calcule el orden del elemento $(4+\mathbb{Z}12, 2+\mathbb{Z}8) \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}12 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}8$. Calcule los elementos de orden finito del grupo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$.

Ejercicio 4.– Encuentre todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^3$, indicando los que son normales y hallando los cocientes, en esos casos.

Ejercicio 5.– Encuentre todos los subgrupos de orden 4 del grupo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$.

Ejercicio 6.– Sea G un grupo finito y $K \subset H \subset G$ subgrupos. Pruebe que $i(H:G)i(K:H) = i(K:G)$.

Ejercicio 7.–

1. Sea $H = \langle(0+\mathbb{Z}4, 1+\mathbb{Z}6)\rangle \subset G = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}6$. Establezca, si es posible, un isomorfismo entre G/H y $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$.
2. Sea $H = \langle(0+\mathbb{Z}4, 2+\mathbb{Z}6)\rangle \subset G = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}6$. Establezca, si es posible, un isomorfismo entre G/H y $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$.
3. Sea $H = \langle(2+\mathbb{Z}4, 3+\mathbb{Z}6)\rangle \subset G = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}6$. Establezca, si es posible, un isomorfismo entre G/H y $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}12$.

Ejercicio 8.– Halle todos los subgrupos de U_{15} (vea la definición en el ejercicio 22 de la relación), indicando cuáles son normales.

Ejercicio 9.– Halle el grupo de simetría de la figura formada por los ejes coordenados del plano euclídeo. Obtenga todos los subgrupos, indicando los que son normales.

Ejercicio 10.– Sea G un grupo, H y K subgrupos de G. Se dice que G es producto directo interno de H y K si $\Phi : H \times K \to G$ dada por $\Phi(h,k) = hk$ es un isomorfismo de grupos. Pruebe que G es producto directo interno de H y K si y sólo si:

1. $G = HK$
2. $hk = kh$ para todo $h \in H$ y $k \in K$.
3. $H \cap K = \{1\}$.

Ejercicio 11.– Usando el ejercicio anterior pruebe que S_3 no es producto directo interno de 2 de sus subgrupos.

Ejercicio 12.– Sea $n = rs$, donde r y s son primos entre sí. Pruebe que $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ es producto directo interno de sus subgrupos cíclicos $\langle r+\mathbb{Z}n\rangle$ y $\langle s+\mathbb{Z}n\rangle$.