ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **3-3-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Pruebe que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$.

Ejercicio 2.– Calcule todos los homomorfismos de grupos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$. Calcule todos los homomorfismos de grupos de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}7$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}16$.

Ejercicio 3.– En $D_{12} = \langle \sigma, \tau |\ \tau^6 = \mathrm{id}, \sigma^2 = \mathrm{id}, \tau^{-1}\sigma = \sigma\tau \rangle$, consideremos los subgrupos $H = \langle \tau^2, \sigma \rangle, K = \langle \tau^3 \rangle$. Pruebe que H y K son normales en D_{12}, que $H \cap K = \{\mathrm{id}\}$ y $D_{12} \simeq H \times K$.

Ejercicio 4.– Sea

$$G = \{\begin{pmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{pmatrix} | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pruebe que G es subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. ¿Es isomorfo a $\mathbb{Z}$?

Ejercicio 5.– Sea $D_8 = \{\sigma, \tau | \sigma^2 = 1, \tau^4 = 1, \tau^{-1}\sigma = \sigma\tau\} = \{1, \tau, \tau^2, \tau^3, \sigma, \sigma\tau, \sigma\tau^2, \sigma\tau^3\}$, y $Q_8 = \{a, b | a^2 = b^2, a^4 = 1, ab = ba^3\} = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$. Pruebe que $D_8 \not\simeq Q_8$.

Ejercicio 6.– Sea G un grupo. Pruebe que las aplicaciones definidas por

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^2 \end{array}$$

son homomorfismos de grupos si y solamente si G es abeliano.

Ejercicio 7.– Sea C_n el grupo cíclico de orden n. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\begin{array}{rcl} \sigma_a : C_n & \to & C_n \\ x & \mapsto & \sigma_a(x) = x^a \end{array}$$

1. Pruebe que $\sigma_a \in \mathrm{Aut}(C_n)$ si y solamente si $\mathrm{mcd}(a, n) = 1$.
2. $\sigma_a = \sigma_b$ si y solamente si n divide a $a - b$.
3. Pruebe que $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 8.– Calcule los subgrupos de D_8. ¿Cuáles son normales?

Ejercicio 9.– Sea $G = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}24$ y $\tilde{G} = G/\langle\overline{12}\rangle$. Para cada entero a simplificamos la notación $\tilde{\bar{a}}$ como $\tilde{a}$.

1. Pruebe que $\tilde{G} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \ldots, \tilde{11}\}$.
2. Calcule el orden de cada elemento de $\tilde{G}$.
3. Pruebe que $\tilde{G} \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z}12$.

Ejercicio 10.– En $D_8 = \{\mathrm{id}, \tau, \tau^2, \tau^3, \sigma, \sigma\tau, \sigma\tau^2, \sigma\tau^3\}$, con $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$, consideremos los subgrupos $H = \langle\sigma\rangle, K = \langle\sigma, \tau^2\rangle$. Pruebe que $K \lhd D_8, H \lhd K$ pero que H no es normal en D_8.

Ejercicio 11.– Sea σ el m-ciclo $(12\ldots m)$. Pruebe que σ^i es un m-ciclo si y solamente si $\mathrm{mcd}(i, m) = 1$.

Ejercicio 12.–

1. Si $\tau = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$, determine si existe un n-ciclo $\sigma(n \geq 10)$ tal que $\tau = \sigma^k$ para algún entero k.
2. Si $\tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$, determine si existe un n-ciclo $\sigma(n \geq 5)$ tal que $\tau = \sigma^k$ para algún entero k.