ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **31-3-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Sea D un número racional que no sea un cuadrado perfecto en $\mathbb{Q}$, y definimos

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{a + b\sqrt{D} | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

como un subconjunto de $\mathbb{C}$.

1. Pruebe que la suma y el producto son operaciones internas.
2. Deduzca que $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.
3. Pruebe que todo elemento no nulo $a + b\sqrt{D}$ tiene un inverso igual a

$$\frac{a - b\sqrt{D}}{a^2 - Db^2}.$$

   Concluya que $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ es un cuerpo.
4. Pruebe que D se puede escribir como $D = f^2 D'$, donde $f \in \mathbb{Q}$ y $D' \in \mathbb{Z}$, con D' no divisible por el cuadrado de ningún entero mayor que 1. Por ejemplo, $8/5 = (2/5)^2 \cdot 10$. A D' se le llama parte libre de cuadrados de D.
5. Con la notación anterior, pruebe que $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \mathbb{Q}(\sqrt{D'})$.

Ejercicio 2.– Sea D un entero libre de cuadrados. Pruebe que

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

es un subanillo de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Si $D \equiv 1$ mód 4 entonces

$$\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D}}{2}] = \{a + b\frac{1+\sqrt{D}}{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

es un subanillo de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Ejercicio 3.– Un elemento x de un anillo R se dice nilpotente si existe $m \geq 0$ tal que $x^m = 0$.

1. Pruebe que si $n = a^k b$ para enteros a, b, entonces la clase $(ab) + \mathbb{Z}n$ es un elemento nilpotente en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$.
2. Si $a \in \mathbb{Z}$, pruebe que la clase $a + \mathbb{Z}n$ es nilpotente en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ si y solamente si todo divisor primo de n es también divisor primo de a.
3. Determine los elementos nilpotentes de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}72$.

Ejercicio 4.– Sean $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5, q(x) = 7x^3 + 33x - 4$. Calcule $p(x) + q(x)$ y $p(x)q(x)$ para los casos en que los coeficientes estén en los anillos

$$\text{a) } \mathbb{Z}, \text{ b) } \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2, \text{ c) } \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3.$$

Ejercicio 5.– Queremos resolver la ecuación

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

para valores de $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

1. Pruebe que si existen $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$ verificando la ecuación entonces existen $x_0', y_0', z_0' \in \mathbb{Z}$ que verifican la ecuación y no tienen factores comunes.

2. Calcule las soluciones de la ecuación para $x, y, z \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$.

3. Deduzca que la única solución de la ecuación original es $x = y = z = 0$.

Ejercicio 6.– Calcule todos los homomorfismos de anillo de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}30$. En cada caso describa el núcleo y la imagen.

Ejercicio 7.– Sea $f(x) = x^4 - 16 \in \mathbb{Z}[x]$.

1. Calcule un polinomio de grado menor o igual que 3 que sea congruente a $7x^{13} - 11x^9 + 5x^5 - 2x^3 + 3$ módulo $f(x)$.

2. Pruebe que las clases $(x+2) + \langle f(x) \rangle$ y $(x-2) + \langle f(x) \rangle$ son divisores de cero en el anillo cociente $\mathbb{Z}[x]/\langle f(x) \rangle$.

Ejercicio 8.– Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$, y consideremos $p(x) = 2x^7 - 7x^5 + 4x^3 - 9x + 1, q(x) = (x-1)^4$. Usaremos notación $\overline{a}$ para indicar elementos del anillo cociente $R = \mathbb{Z}[x]/\langle f(x) \rangle$.

1. Exprese los siguientes elementos en la forma $\overline{r(x)}$ para algún polinomio $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grado menor o igual que 2: $\overline{p(x)}, \overline{q(x)}, \overline{p(x) + q(x)}, \overline{p(x)q(x)}$.

2. Pruebe que R no es dominio de integridad.

3. Pruebe que $\overline{x}$ es una unidad en R.

Ejercicio 9.– Sea $F = \{0, 1, a, b\}$, donde definimos las operaciones de suma y multiplicación como sigue:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

1. Pruebe que $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo con 4 elementos.

2. Pruebe que el grupo aditivo $(F, +)$ es isomorfos a $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^2$.

3. Pruebe que el grupo multiplicativo $(F^*, \cdot)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$.

Ejercicio 10.– Determine los primos $p \in \mathbb{Z}$ tales que $x^2 + x + 1$ divide a $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ en $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)[x]$. Igual cuestión para $x^2 + 1$ y $x^3 + x^2 + 22x + 15$.

Ejercicio 11.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Pruebe que la aplicación $f : \mathbb{Z}[x] \to (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)[x]$ definida por la reducción módulo p de los coeficientes de un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ es un homomorfismo de anillos. Calcule su núcleo e imagen.