ÁLGEBRA **Problemas propuestos** **5-5-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.– Encuentre el polinomio mínimo del número complejo $\alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ y calcule $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 2.–

1. Encuentre el polinomio mínimo del número complejo $\beta = \frac{\sqrt{2}(i-1)}{2}$.
2. Averigüe si $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(\beta)$ y, en caso afirmativo, halle el grado de la extensión.
3. Halle $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}]$.
4. Averigüe si $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\beta)$.

Ejercicio 3.– Sea el número complejo $\gamma = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Calcule $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 4.– Sea $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$. Pruebe $\mathbb{Q}\left(\sqrt{m} - \sqrt{n}\right) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$.

Ejercicio 5.– Sean α, β números complejos tales que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = p$ y $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = q$, con p y q primos entre sí. Demuestre que $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = pq$.

Ejercicio 6.– Sea α un elemento algebraico sobre k, $f(X) \in k[X]$ su polinomio mínimo sobre k. Exprese el inverso de α como polinomio en α con coeficientes en k.

Ejercicio 7.– Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $X^3 + 3X + 1 = 0$.

1. Halle $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
2. Encuentre el polinomio mínimo de $\alpha^2 + 1$.
3. Exprese el inverso del número anterior como polinomio en α con coeficientes racionales.

Ejercicio 8.–

1. Descomponga $X^4 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$ como producto de factores irreducibles.
2. Halle $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, para $\alpha = \sqrt{2i}$.
3. Compare los siguientes cuerpos: $\mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{Q}(i)$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2}$.

Ejercicio 9.– Sean los números complejos $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ y $\beta = \sqrt{1-\sqrt{3}}$. Se pide:

1. Halle el polinomio mínimo $f(X)$ de β sobre $\mathbb{Q}$, y determine $[\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}]$.
2. Calcule $[\mathbb{Q}[\alpha, \beta] : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 10.– Sea $\alpha = \sqrt[3]{2}$

1. Calcule $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
2. Calcule el polinomio mínimo de $\alpha^2 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.
3. Exprese el inverso del número anterior como polinomio en α con coeficientes racionales.

Ejercicio 11.–

1. Demuestre que $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.
2. Si $\alpha = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$, halle $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
3. Halle el polinomio mínimo de $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\alpha+\alpha^4}{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

4. Halle un entero d tal que $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Ejercicio 12.–

1. Demuestre que $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. (ver ejercicio 10 de la práctica anterior)
2. Si $\alpha = e^{2\pi i/7} \in \mathbb{C}$, halle $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
3. Halle el polinomio mínimo de $\cos \frac{2\pi}{7} = \frac{\alpha+\alpha^6}{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.